CPU MPI 2ème année – Compléments d'algèbre et d'algèbre linéaire

Feuille 1 : relations d'équivalence, espaces vectoriels quotients

Exercice 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Rappeler la définition de la relation de colinéarité entre les vecteurs de E. S'agit-il d'une relation d'équivalence ?
2. Si oui, décrire les classes d'équivalence.

Exercice 2 :

1. Rappeler à quelle condition on dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables.
2. Montrer que cela définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3*. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de la liste suivante :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \; (a, b \in \mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \; (a \in \mathbb{C}),$$

et que deux matrices différentes de la liste ne sont pas semblables.

Exercice 3 : On dit que deux matrices de même taille $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si il existe deux matrices inversibles $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ telles que $B = PAQ$.

1. Montrer qu'on définit ainsi une relation d'équivalence $\sim$ sur l'ensemble $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
2. On note par $J_{p,q,r}$ la matrice de taille (p, q) formée par un bloc en haut à gauche égal à la matrice identité de taille r et des 0 partout ailleurs :

$$J_{p,q,r} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}).$$

   Montrer que, si $f : E \to F$ est une application linéaire de rang r entre deux espaces de dimensions $\dim E = q$ et $\dim F = p$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F telles que $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = J_{p,q,r}$.
3. En utilisant 2), montrer que deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont même rang.
4. Combien y a-t-il d'éléments dans l'ensemble quotient $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})/\sim$?

Exercice 4 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer qu'il y a un isomorphisme naturel $F/(F \cap G) \to (F + G)/G$.
2. Lorsque E est de dimension finie, quelle formule de dimension cet isomorphisme permet-il de retrouver ?

Exercice 5 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels tels que $F \subset G$. On suppose F et G de même codimension finie. Montrer que $F = G$.

Exercice 6 : Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Pour $n \geq 0$, soit $F = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^n} = 0\}$.

1. Comment retranscrire l'appartenance $f \in F$ en utilisant le vocabulataire de l'analyse ?
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de codimension $n + 1$.

Exercice 7 : Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par u.

1. Montrer que u induit une application linéaire $u' : F \to F$, $x \mapsto u(x)$ définie par restriction ainsi qu'une application linéaire $u'' : E/F \to E/F$, $\overline{x} \mapsto \overline{u(x)}$ définie par passage au quotient.
2. De plus, lorsque $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_d)$ est une base de F complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, montrer que $\mathcal{B}'' = (\overline{e_{d+1}}, \ldots, \overline{e_n})$ est une base de E/F, et que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :
$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
où $A = Mat_{\mathcal{B}_F}(u')$ et $D = Mat_{\mathcal{B}''}(u'')$.
3. En déduire que
$$Tr(u) = Tr(u') + Tr(u''), \quad \det(u) = \det(u') \times \det(u''), \quad \chi_u = \chi_{u'} \times \chi_{u''}.$$