L3 Mathématiques – Site Nancy, S5 – 2025-2026

Algèbre 2 – Feuille 1.5

Sous-groupe engendré par une partie

Cette feuille d'exercices vise à appréhender la notion de sous-groupe engendré par une partie et à donner une méthode pour calculer ces sous-groupes.

Rappelons la définition donnée dans le cours :

Définition 1 *Si X est une partie d'un groupe G, le sous-groupe de G engendré par X est l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent X. C'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-groupe de G contenant X. On le note $\langle X\rangle$.*

Le sous-groupe $\langle X\rangle$ engendré par une partie X d'un groupe G est donc le sous-ensemble caractérisé par les propriétés, d'une part d'être un sous-groupe contenant X, et d'autre part d'être inclus dans tout tel sous-groupe.

Autrement dit, étant donné un sous-ensemble $K \subset G$, on a $K = \langle X\rangle$ si et seulement si :

(a) K est un sous-groupe de G et $X \subset K$;

(b) Si H est un sous-groupe de G contenant X, alors $K \subset H$.

Je vous propose la méthode suivante pour déterminer le sous-groupe engendré par une partie X :

1. On pose : “Soit H un sous-groupe de G contenant X”.
2. On montre, en utilisant que H est un sous-groupe, que H contient tel et tel élément (autant d'éléments que possible).
3. On pose K le sous-ensemble des éléments trouvés au point précédent. Il vérifie donc la propriété : si H est un sous-groupe de G contenant X, alors $H \subset K$.
4. On se demande si K est un sous-groupe de G. Si non, c'est que l'on peut produire de nouveaux éléments dans H, et on retourne au point 2. Si oui, on continue :
5. On voit que K est un sous-groupe contenant X : il satisfait le point (a). On voit aussi que la propriété du point 3. donne immédiatement (b). Ainsi, $K = \langle X\rangle$.

Exercice 1. Montrer, en utilisant la définition du sous-groupe engendré par une partie, que le sous-groupe engendré par un élément a est l'ensemble des an avec $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ et d leur pgcd. Montrer que le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par m et n, $\langle m, n\rangle$, est $d\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Quels sont les éléments du sous-groupe engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$?

Exercice 4. Soit $\mathbb{D}_8$ le groupe engendré par les deux matrices

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il est d'ordre 8. Le groupe $\mathbb{D}_8$ est appelé groupe diédral d'ordre 8.

Exercice 5. Soit $a = (12)$ et $b = (124)$ deux permutations du groupe $\mathfrak{S}_4$. Déterminer le sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ engendré par a et b.

Exercice 6. Soit H un sous-groupe strict d'un groupe G. Déterminer le groupe engendré par le complémentaire de H dans G.