



Algèbre 2 – Feuille 1.5  
**Sous-groupe engendré par une partie**

Cette feuille d'exercices vise à appréhender la notion de sous-groupe engendré par une partie et à donner une méthode pour calculer ces sous-groupes.

Rappelons la définition donnée dans le cours :

**Définition 1** Si  $X$  est une partie d'un groupe  $G$ , le sous-groupe de  $G$  engendré par  $X$  est l'intersection de tous les sous-groupes de  $G$  qui contiennent  $X$ . C'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-groupe de  $G$  contenant  $X$ . On le note  $\langle X \rangle$ .

Le sous-groupe  $\langle X \rangle$  engendré par une partie  $X$  d'un groupe  $G$  est donc caractérisé par les deux propriétés :

- (a)  $\langle X \rangle$  est un sous-groupe de  $G$  et il contient  $X$ .
- (b) Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$  contenant  $X$ , alors  $\langle X \rangle \subset H$ .

Je vous propose la méthode suivante pour déterminer le sous-groupe engendré par une partie  $X$  :

1. On pose : "Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$  contenant  $X$ ".
2. On montre, en utilisant que  $H$  est un sous-groupe, que  $H$  contient tel et tel élément (autant d'éléments que possible).
3. On pose  $K$  le sous-ensemble des éléments trouvés au point précédent. Il vérifie donc la propriété : si  $H$  est un sous-groupe de  $G$  contenant  $X$ , alors  $H \subset K$ .
4. On se demande si  $K$  est un sous-groupe de  $G$ . Si non, c'est que l'on peut produire de nouveaux éléments dans  $H$ , et on retourne au point 2. Si oui, on continue :
5. On voit que  $K$  est un sous-groupe contenant  $X$  : il satisfait le point
  - (a). On voit aussi que la propriété du point 3. donne immédiatement
  - (b). Ainsi,  $K = \langle X \rangle$ .

**Exercice 1.** Montrer, en utilisant la définition du sous-groupe engendré par une partie, que le sous-groupe engendré par un élément  $a$  est l'ensemble des  $a^n$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 2.** Quels sont les éléments du sous-groupe engendré par  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  dans  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  ?

**Exercice 3.** Soit  $H$  un sous-groupe strict d'un groupe  $G$ . Déterminer le groupe engendré par le complémentaire de  $H$  dans  $G$ .

**Exercice 4.** Soit  $\mathbb{D}_8$  le groupe engendré par les deux matrices

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il est d'ordre 8. Le groupe  $\mathbb{D}_8$  est appelé groupe diédral d'ordre 8.