L3 Mathématiques – Site Nancy, S5 – 2024-2025

Algèbre 2 – Feuille 1
Groupes

Exercice 1. Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de la loi

$$(a,b)\star(a',b') = (a+a', be^{a'} + b'e^{-a})$$

est un groupe non abélien.

Exercice 2. Sur $G =]-1,1[$ on définit la loi

$$a\star b = \frac{a+b}{1+ab}, \quad \forall x,y\in G.$$

Montrer que $(G,\star)$ est un groupe abélien.

Exercice 3. Soit G l'ensemble des transformations affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$g_{a,b} : x \mapsto ax+b, \quad \text{avec } a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$$

Montrer que G, muni de la composition des applications, est un groupe non abélien.

Exercice 4. Montrer que si $(G,\star)$ est un groupe et E un ensemble non vide, alors l'ensemble G^E des applications de E dans G muni de la loi $\cdot$ définie par

$$\forall f,g\in G^E, \forall x\in E, \quad (f\cdot g)(x) = f(x)\star g(x)$$

est un groupe et que ce groupe est abélien si G l'est.

Exercice 5. Soit G un groupe contenant deux éléments, qu'on note e,x, avec e l'élément neutre.

1. Montrer que $x*x$ ne peut pas être égal à x.
2. Ecrire la table de multiplication de G, et remarquer qu'il n'y a qu'un groupe d'ordre 2.

Exercice 6. Soit G un groupe contenant trois éléments, qu'on note e,x,y, avec e l'élément neutre.

1. Montrer que $x*y$ ne peut pas être égal à x ni à y. En déduire que $x*y=e$, et de même que $y*x=e$.
2. Montrer que $x*x$ ne peut pas être égal à x ni à e. En déduire que $x*x=y$, et de même que $y*y=x$.
3. Ecrire la table de multiplication de G.

Exercice 7. Soit G un groupe contenant quatre éléments. On note e l'élément neutre.

1. On suppose d'abord qu'il existe $x\in G$ tel que $x*x\neq e$. Soit x un tel élément. Montrer que e,x et $x*x$ sont distincts.
2. Soit $y\notin\{e,x,x*x\}$, de sorte que $G=\{e,x,x*x,y\}$. Montrer que $x*y$ ne peut être $x,y,x*x$, et que donc $x*y=e$.
3. Montrer que $x*(x*x)$ ne peut être $x,x*x,e$, et que donc $x*(x*x)=y$.
4. Ecrire la table de multiplication de G dans ce cas.
5. On suppose maintenant que $\forall x\in G, x*x=e$. Soit $x\neq e$, et soit $y\notin\{e,x\}$. Montrer que $G=\{e,x,y,x*y\}$.
6. Montrer que $y*x=x*y$.
7. Ecrire la table de multiplication de G dans ce cas.

Exercice 8. (groupe diédral) Soit $P=(A_1,\dots,A_n)$ un polygône régulier à n côtés du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Les *côtés* de P sont par définition les couples (A_i,A_{i+1}) (pour i modulo n) et (A_{i+1},A_i). Soit G le groupe des isométries de P.

1. Montrer qu'une isométrie préserve les angles non orientés.
2. Soit (M,N) un côté de P et soit σ une isométrie de P. Montrer que $(\sigma(M),\sigma(N))$ est un côté de P.
3. Montrer que s'il existe un côté (M,N) tels que $\sigma(M)=M$ et $\sigma(N)=N$, alors σ est l'identité.
4. Montrer qu'étant donnés deux côtés $(M_1,N_1),(M_2,P_2)$ de P, il existe un unique $\sigma\in G$ tel que $\sigma(M_1)=M_2$ et $\sigma(N_1)=N_2$.
5. Montrer que $|G|=2n$.
6. Soit r la rotation d'angle $2\pi/n$ et soit s la symétrie axiale échangeant A_i et A_{-i}. Montrer que $G=\{Id,r,\dots,r^{n-1},s,rs,\dots,r^{n-1}s\}$. Les éléments $Id,r,\dots,r^{n-1}$, resp. $s,rs,\dots,r^{n-1}s$ sont les *rotations*, resp. les *symétries axiales* de G.
7. Montrer que r et s vérifient la relation $rs=sr^{-1}$, et que cette relation détermine la table de multiplication de G.
8. Montrer que toute symétrie s' vérifie $(s')^2=Id$.
9. Montrer que pour toute rotation r' et toute symétrie s', on a aussi $r's'=s'(r')^{-1}$.

Exercice 9. Chercher des exemples d'entiers n et m tels que $n\mathbb{Z}\cup m\mathbb{Z}$ soit un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Qu'observez vous concernant ces entiers ? Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe G. A quelle condition $H\cup K$ est-il un sous-groupe de G ?

Exercice 10. Soit $(G, \star)$ un groupe d'élément neutre e et soit $a \in G$. On notera $a^{-\star}$ le symétrique de a par rapport à la loi $\star$.

On définit une loi de composition interne T sur G par

$$xTy = x \star a \star y.$$

(a) Montrer que (G, T) est un groupe

(b) Soit H un sous-groupe de $(G, \star)$ et soit

$$K = a^{-\star} \star H = \{a^{-\star} \star x \mid x \in H\}.$$

Montrer que K est un sous-groupe de (G, T).

(c) Montrer que $f : x \mapsto x \star a^{-\star}$ est un isomorphisme de $(G, \star)$ sur (G, T).

Exercice 11. Montrer que $H = \{a + b\sqrt{2},\ \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 12. Montrer que $H = \{a + b\sqrt{3},\ a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Exercice 13. Montrer que

$$H = \{\begin{pmatrix} 2^k & \frac{n}{2^m} \\ 0 & 2^{-k} \end{pmatrix} | k, n, m \in \mathbb{Z}\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Exercice 14. Montrer que

$$H = \{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.

Exercice 15. Soit G un groupe multiplicatif.

(a) Montrer que pour tout élément $a \in G$, le centralisateur de a,

$$Z_a = \{b \in G,\ \ ab = ba\}$$

est un sous-groupe de G.

(b) Montrer que le centre de G,

$$Z(G) = \{a \in G,\ \ \forall b \in G,\ ab = ba\}$$

est un sous-groupe de G.

(c) Déterminer les centres des groupes $GL(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{R})$.

Exercice 16. Soit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ordre de a.

Exercice 17. Soit G un groupe. Montrer que pour tout $a, b \in G$ on a :

(a) a et a^{-1} ont le même ordre ;

(b) a et bab^{-1} ont le même ordre ;

(c) ab et ba ont le même ordre.

Exercice 18. Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-ensemble stable par produits et fini. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 19. Soit G un groupe abélien et a et b deux éléments d'ordre finis.

(a) Montrer que ab est d'ordre fini et que l'ordre de ab divise le ppcm des ordres de a et b.

(b) Montrer que si les ordres de a et b sont premiers entre eux, l'ordre de ab est égal au ppcm des ordres de a et b.

Exercice 20. (a) Montrer que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ est un groupe multiplicatif.

(b) On considère les deux éléments $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Montrer que a et b sont d'ordres finis mais que ab est d'ordre infini.

Exercice 21. (groupe quotient) Montrer directement que les conditions énoncées dans la Proposition 8.6 du polycopié sont vérifiées pour les sous-groupes $n\mathbb{Z}$ du groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Déterminer explicitement la loi obtenue sur le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 22. Montrer que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ est isomorphe $\mathbb{R}^*$.

Exercice 23. Soit H un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 24. Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Montrer qu'on a équivalence entre :

(a) HK est un sous-groupe de G,

(b) KH est un sous groupe de G,

(c) $HK \subset KH$,

(d) $KH \subset HK$.

Exercice 25. Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes distingués de G. On suppose que $HK = G$ et $H \cap K = \{e\}$. Montrer que $G \simeq H \times K$.

Exercice 26. Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes distingués de G tels que $K \subset H$. Montrer

(a) H/K est un sous-groupe distingué de G/K.

(b) Les deux groupes quotient $(G/K)/(H/K)$ et G/H sont isomorphes.