L3 Mathématiques – Site Nancy, S5 – 2023-2024

Algèbre 2 – Feuille 1
Groupes

Exercice 1. Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de la loi

$$(a,b)\star(a',b') = (a+a', be^{a'} + b'e^{-a})$$

est un groupe non abélien.

Exercice 2. Sur $G =]-1,1[$ on définit la loi

$$a \star b = \frac{a+b}{1+ab}, \quad \forall x,y \in G.$$

Montrer que $(G,\star)$ est un groupe abélien.

Exercice 3. Soit G l'ensemble des transformations affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$g_{a,b} : x \mapsto ax+b, \ \text{ avec } a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Montrer que G, muni de la composition des applications, est un groupe non abélien.

Exercice 4. Montrer que si $(G,\star)$ est un groupe et E un ensemble non vide, alors l'ensemble G^E des applications de E dans G muni de la loi $\cdot$ définie par

$$\forall f,g \in G^E, \forall x \in E, \ \ (f\cdot g)(x) = f(x)\star g(x)$$

est un groupe et que ce groupe est abélien si G l'est.

Exercice 5. Montrer qu'un groupe G où tout élément $a \in G$ est involutif c-à-d. $a^2 = e$, est abélien.

Montrer que si G est d'ordre fini, alors cet ordre est une puissance de 2. Pour cela, on pourra répondre aux questions suivantes :

1. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "Pour tout groupe G tel que $|G| \leq n$ et dont tous les éléments sont involutifs, il existe un entier k tel que $|G| = 2^k$." Montrer que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
2. Soit n un entier, et supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit G un groupe dont tous les éléments sont involutifs et tel que $|G| \leq n+1$. Supposons que $|G| \geq 2$. Montrer qu'il existe $a \in G$ tel que $a \neq e$. Fixons un tel élément a.
3. Montrer que $\langle a \rangle = \{e,a\}$.
4. Montrer que $\langle a \rangle$ est distingué dans G.
5. On considère alors le groupe quotient $G/\langle a \rangle$. Rappeler comment est définie la loi de groupe sur $G/\langle a \rangle$ et établir une relation entre $|G|$ et $|G/\langle a \rangle|$.
6. Montrer que tous les éléments de $G/\langle a \rangle$ sont involutifs.
7. Montrer qu'il existe un entier k tel que $|G/\langle a \rangle| = 2^k$.
8. Montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
9. Conclure.

Exercice 6. Soit G un groupe. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) G abélien ;
(2) $(ab)^2 = a^2b^2$ pour tout $a,b \in G$;
(3) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ pour tout $a,b \in G$;
(4) $(ab)^n = a^nb^n$ pour tout $a,b \in G$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$;

Exercice 7. Donner un exemple d'un groupe non abélien G tel que $a,b \in G$ on ait $(ab)^3 = a^3b^3$, pour tout $a,b \in G$. Indication : considérer les éléments a de $\mathcal{M}(3,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ tels que $a_{i,i} = \bar{1}$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $a_{i,j} = \bar{0}$ pour $1 \leq j < i \leq 3$.

Exercice 8. Chercher des exemples d'entiers n et m tels que $n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z}$ soit un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Qu'observez vous concernant ces entiers ? Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe G. A quelle condition $H \cup K$ est-il un sous-groupe de G ?

Exercice 9. Soit $(G,\star)$ un groupe d'élément neutre e et soit $a \in G$. On notera $a^{-\star}$ le symétrique de a par rapport à la loi $\star$.

On définit une loi de composition interne T sur G par

$$xTy = x \star a \star y.$$

(a) Montrer que (G,T) est un groupe
(b) Soit H un sous-groupe de $(G,\star)$ et soit

$$K = a^{-\star} \star H = \{a^{-\star} \star x \mid x \in H\}.$$

Montrer que K est un sous-groupe de (G,T).
(c) Montrer que $f : x \mapsto x \star a^{-\star}$ est un isomorphisme de $(G,\star)$ sur (G,T).

Exercice 10. Montrer que $H = \{a + b\sqrt{2}, \ \ a,b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

Exercice 11. Montrer que $H = \{a + b\sqrt{3},\ a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 3b^2 = 1\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Exercice 12. Montrer que

$$H = \{ \begin{pmatrix} 2^k & \frac{n}{2^m} \\ 0 & 2^{-k} \end{pmatrix} | k, n, m \in \mathbb{Z} \}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Exercice 13. Montrer que

$$H = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$.

Exercice 14. Soit G un groupe multiplicatif.

(a) Montrer que pour tout élément $a \in G$, le centralisateur de a,

$$Z_a = \{ b \in G, \ \ ab = ba \}$$

est un sous-groupe de G.

(b) Montrer que le centre de G,

$$Z(G) = \{ a \in G, \ \forall b \in G, \ ab = ba \}$$

est un sous-groupe de G.

(c) Déterminer les centres des groupes $GL(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{R})$.

Exercice 15. Soit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ordre de a.

Exercice 16. Soit G un groupe. Montrer que pour tout $a, b \in G$ on a :

(a) a et a^{-1} ont le même ordre ;

(b) a et bab^{-1} ont le même ordre ;

(c) ab et ba ont le même ordre.

Exercice 17. Montrer que dans un groupe abélien G, l'ensemble des éléments d'ordre fini forme un sous-groupe de G.

Exercice 18. Soit G un groupe abélien et a et b deux éléments d'ordre finis.

(a) Montrer que ab est d'ordre fini et que l'ordre de ab divise le ppcm des ordres de a et b.

(b) Montrer que si les ordres de a et b sont premiers entre eux, l'ordre de ab est égal au ppcm des ordres de a et b.

Exercice 19. (a) Montrer que $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ est un groupe multiplicatif.

(b) On considère les deux éléments $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Montrer que a et b sont d'ordres finis mais que ab est d'ordre infini.

Exercice 20. (groupe quotient) Montrer directement que les conditions énoncées dans la Proposition 7.6 du polycopié sont vérifiées pour les sous-groupes $n\mathbb{Z}$ du groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Déterminer explicitement la loi obtenue sur le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 21. Montrer que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ est isomorphe $\mathbb{R}^*$.

Exercice 22. Soit H un sous-groupe d'indice 2 dans un groupe G. Montrer que H est distingué dans G.

Exercice 23. Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Montrer qu'on a équivalence entre :

(a) HK est un sous-groupe de G,

(b) KH est un sous groupe de G,

(c) $HK \subset KH$,

(d) $KH \subset HK$.

Exercice 24. Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes distingués de G. On suppose que $HK = G$ et $H \cap K = \{e\}$. Montrer que $G \simeq H \times K$.

Exercice 25. Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. On suppose que K est distingué dans G. Montrer

(a) $KH = HK$ est un sous-groupe de G, K est un sous-groupe distingué de KH et $K \cap H$ est un sous-groupe distingué de H.

(b) Les deux groupes quotient KH/K et $H/K \cap H$ sont isomorphes.

Exercice 26. Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes distingués de G tels que $K \subset H$. Montrer

(a) H/K est un sous-groupe distingué de G/K.

(b) Les deux groupes quotient $(G/K)/(H/K)$ et G/H sont isomorphes.