CPU MPI 2ème année – Compléments d'algèbre et d'algèbre linéaire

Feuille 2 : matrices de permutation

Par n on désigne un entier ≥ 2, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E.

À toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$ on associe la matrice $M_\sigma = (m_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j). \end{cases}$$

À toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$ on associe également l'endomorphisme f_σ de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M_σ.

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée une *matrice de permutation* si l'on peut trouver un élément σ de $\mathfrak{S}_n$ tel que $A = M_\sigma$.

On notera par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1 : *Quelques propriétés générales.*

1. Montrer que l'application $\phi : \mathfrak{S}_n \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi(\sigma) = M_\sigma$ est injective.
2. En déduire que $\mathcal{P}_n$ est un ensemble fini. Quel est son cardinal ?
3. Que dire de M_σ si σ est la permutation identité ?
4. Déterminer $f_\sigma(e_j)$, pour tout élément j de $[\![1, n]\!]$.

Exercice 2 : *Quelques exemples.*

1. Ici $n = 3$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que A est une matrice de permutation et trouver $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ telle que $A = M_\sigma$.

   b) Calculer A^3. Quel est le polynôme minimal de A ? Quelles sont ses racines ?

2. Ici $n = 4$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que A est une matrice de permutation et trouver $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ telle que $A = M_\sigma$.

   b) Calculer A^2. Quel est le polynôme minimal de A ? Quelles sont ses racines ?

3. Ici n vaut encore 4. On considère l'élément σ de $\mathfrak{S}_4$ défini par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 4$ et $\sigma(4) = 1$.

   a) Écrire la matrice M_σ. Calculer M_σ^2 et M_σ^4.

   b) Déterminer le polynôme minimal de M_σ et ses racines.

Exercice 3 : *Quelques propriétés opératoires des matrices de permutation.*

Dans cet exercice, n désigne à nouveau un entier quelconque, supérieur ou égal à 2.

1. Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$.
   Montrer que le coefficient (i, j) de la matrice AM_σ est égal à $a_{i,\sigma(j)}$.
   Puis décrire en une phrase la façon dont la matrice AM_σ peut se déduire de la matrice A.
2. Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$.
   a) Soit σ' une autre permutation de $[\![1, n]\!]$. Montrer que $M_{\sigma'}M_\sigma = M_{\sigma' \circ \sigma}$.
   b) En déduire que M_σ est inversible et que $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$. Montrer que la matrice inverse M_σ^{-1} coïncide également avec la matrice transposée de M_σ.
   c) Que peut-on dire de l'application $\phi : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $\phi(\sigma) = M_\sigma$?
3. Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$.
   a) Montrer que, pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, M_σ^k est une matrice de permutation.
   b) En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe deux éléments distincts q et q' de $\mathbb{N}$ tels que $M_\sigma^q = M_\sigma^{q'}$.
   c) En déduire qu'il existe un élément r de $\mathbb{N}^*$ tel que $M_\sigma^r = I_n$.

Exercice 4 : *Matrices qui commutent avec toutes les matrices de permutation.*

Dans cet exercice, on note par $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation M_σ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient $B = (b_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et σ une permutation de $[\![1, n]\!]$.
   Montrer que : $BM_\sigma = M_\sigma B$ si et seulement si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $b_{i,\sigma(j)} = b_{\sigma^{-1}(i),j}$.
2. Soient α et β deux réels. On pose la matrice $M(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ (de taille n).
   Montrer que $M(\alpha, \beta)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{L}$.
3. Réciproquement, montrer que si B est dans $\mathcal{L}$, alors il existe deux réels α et β tels que $B = M(\alpha, \beta)$.

Exercice 5 : *Matrices de permutation de trace $n - 2$.*

Soit σ une permutation de $[\![1, n]\!]$.

1. Montrer que si M_σ n'est pas l'identité, alors la trace de M_σ est un élément de $[\![0, n - 2]\!]$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur σ pour que la trace de M_σ soit égale à $n - 2$.
3. Montrer que deux matrices de permutation de trace $n - 2$ sont semblables.