L3 Mathématiques – Site Nancy, S5 – 2021/22

Algèbre 2 – Feuille 2
Actions de groupes

Exercice 1. Soit le sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R}) \right\}$$

Montrer que G agit naturellement sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall g \in G, \forall X \in \mathbb{R}^2, \quad (g, X) \mapsto g \cdot X = gX$$

Déterminer les orbites de cette action.

Exercice 2. Soit G un sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$. On fait agir G sur $\mathbb{R}^2$. Décrire l'orbite d'un point A quand G est le sous-groupe engendré par

(a) une symétrie par rapport à une droite D passant par $(0,0)$;

(b) une rotation d'angle $\pi/2$ de centre $(0,0)$.

Exercice 3. Soit G un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$ opérant sur $\{1,2,3,4\}$ par l'action naturelle de $\mathcal{S}_4$. Pour $i \in \{1,2,3,4\}$, on note O_i l'orbite de i et G_i le stabilisateur de i. Décrire O_i et G_i lorsque :

(a) G est engendré par le 3-cycle $(1\,2\,3)$;

(b) G est engendré par le 4-cycle $(1\,2\,3\,4)$;

(c) G est engendré par les double transpositions $(x\,y)(z\,t)$ disjointes, $x, y, z, , t \in \{1,2,3,4\}$;

(d) G est le sous-groupe des permutations paires de $\mathcal{S}_4$.

Exercice 4. On considère l'action de $\mathcal{S}_3$ sur $X = \mathcal{S}_3$ par conjugaison. Pour chaque point $x \in X$, décrire l'orbite et le stabilisateur.

Exercice 5. Soit $n \geq 1$. On considère l'action du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$\forall (A, x) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n, \;\; A \cdot x = A(x)$$

Montrer que les orbites sont les sphères de centre $0_{\mathbb{R}^n}$.

Exercice 6. Soient n, m deux entiers naturels non nuls. On fait agir le groupe $G = GL(n,\mathbb{R}) \times GL(m,\mathbb{R})$ sur l'ensemble des matrices rectangulaires $E = \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ par

$$\forall (P,Q) \in G, \forall A \in E, \;\; (P,Q) \cdot A = PAQ^{-1}$$

Montrer que les orbites de cette action sont les ensembles

$$\mathcal{O}_r = \{A \in E, \; \mathrm{rg}(A) = r\}$$

où r est un entier compris entre 0 et $\min(n,m)$.

Exercice 7. (a) Déterminer les orbites de l'action naturelle de $GL(n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$.

(b) Montrer que le groupe $GL(n,\mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

(c) Déterminer le stabilisateur de $(1, 0, \ldots, 0)$.

(d) En déduire qu'il existe une bijection naturelle de $GL(n,\mathbb{R})/GL(n-1,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Exercice 8. (a) Montrer que le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ opère transitivement sur le demi-plan $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}, \; \Im(z) > 0\}$ via

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \tag{1}$$

(b) Déterminer le stabilisateur de i.

(c) En déduire qu'il existe une bijection entre $SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$ et $\mathbb{T}$.

Exercice 9. On note $SO_2(\mathbb{R})$ (resp. $SO_3(\mathbb{R})$) le groupe de rotations (isométries directes) de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$).

(a) Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension ≥ 2 et $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité de E. On désigne par $O(E)$ le groupe orthogonal de E (groupe des isométries de E) et par $SO(E)$ (ou $O^+(E)$) le sous-groupe de $O(E)$ formé des automorphismes orthogonaux positifs (rotations vectorielles).

(1) Montrer que l'application $(u, x) \in SO(E) \times S \mapsto u \cdot x = u(x)$ définit une action transitive de $SO(E)$ sur S. En déduire que pour tout $x \in S$, $SO(E)/SO(E)_x$ est en bijection avec S.

(2) On suppose que $\dim E = 2$.

(a) Montrer que pour tout $x \in S$, $SO(E)_x = \{Id\}$, en déduire que $SO(E)$ est en bijection avec S.

(b) Montrer que tout sous-groupe fini d'ordre n de $SO(E)$ est cyclique, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(3) On suppose que $\dim E = 3$.

(a) Montrer que toute rotation $u \neq Id$ de $SO(E)$ a exactement deux points fixes x et $-x$ dans S. Ces points sont appelés les pôles de u.

(b) Soit G un sous-groupe fini d'ordre n de $SO(E)$ et notons P l'ensemble des pôles des éléments de $G \setminus \{Id\}$.

Montrer que $(u, x) \in G \times P \mapsto u \cdot x = u(x)$ définit une action de G sur P et que le nombre d'orbites pour cette action est $r = 2$ ou $r = 3$.

(c) Montrer que si $r = 2$ alors le groupe G est cyclique d'ordre n, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(d) [Facultatif] Montrer que si $r = 3$ alors le groupe G est isomorphe soit à groupes $\mathcal{D}_n$ (groupe diédral), soit à $\mathcal{A}_4$, soit à $\mathcal{S}_4$, soit à $\mathcal{A}_5$.

Exercice 11. Soit G un groupe d'ordre 35 opérant sur un ensemble E de cardinal 19. On suppose que G ne fixe aucun élément de E. Combien y a-t-il d'orbites pour cette action ?

Exercice 12. Soit G un groupe d'ordre 143 opérant sur un ensemble E qui contient 108 éléments. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$.

Exercice 13. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

(a) Montrer qu'en posant $g \cdot (aH) = (ga)H$, où $a, g \in G$, on définit une action de G sur l'ensemble G/H des classes à gauche modulo H.

(b) Montrer que cette action est transitive et déterminer le stabilisateur de aH.

(c) On suppose que G est fini. Calculer le cardinal d'une orbite et retrouver le théorème de Lagrange.

Exercice 14. Soit G un groupe d'ordre p^2 où p est un nombre premier. Le but de cet exercice est de montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

(1) Montrer que s'il existe $x \in G$ tel que $o(x) = p^2$, alors $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
On suppose qu'il n'existe pas x dans G d'ordre p^2.

(2) Montrer que pour tout $x \in G \setminus \{e\}$, on a $o(x) = p$ et $\langle x \rangle \subsetneq G$.
Soit $e \neq x \in G$, et par la question (2), soit $y \in G \setminus \langle x \rangle$.

(3) Montrer que $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$ (on pourra raisonner sur l'ordre de ce sous-groupe).

(4) Montrer que $\varphi : \langle x \rangle \times \langle y \rangle \to G$ définie par $\varphi(u, v) = uv$ est un morphisme de groupes.

(5) Montrer que le noyau de φ se réduit au singleton (e, e), et que donc φ est injective.

(6) Montrer que φ est un isomorphisme et qu'ainsi $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 15. (Premier groupe non abélien)

(1) Montrer que tout groupe d'ordre au plus 5 est abélien.

(2) Montrer que $\mathfrak{S}_3$ est un groupe non abélien d'ordre 6.

(3) Soit $x = (123)$ et $y = (12)$. Montrer que $\mathfrak{S}_3 = \{e, x, x^2, y, xy, x^2y\}$ et établir la table de multiplication de $\mathfrak{S}_3$ dans cette description.
Le but de cet exercice est de montrer que $\mathfrak{S}_3$ est le seul groupe d'ordre 6 non abélien, à isomorphismes près. Soit donc G un groupe non abélien d'ordre 6.

(3) Montrer qu'il existe des éléments x et y de G tels que x soit d'ordre 3 et y d'ordre 2.

(4) Montrer que les six éléments e, x, x^2, y, xy, x^2y sont distincts, et que donc $G = \{e, x, x^2, y, xy, x^2y\}$.

(5) Montrer que $yx \neq xy$ et en déduire que $yx = x^2y$.

(6) Déterminer le produit de deux éléments quelconques de $G = \{e, x, x^2, y, xy, x^2y\}$.

(7) Montrer que $G \simeq \mathfrak{S}_3$.

Exercice 16. On se propose de déterminer les groupes finis qui ont exactement trois classes de conjugaison. Soit G un groupe fini, d'ordre n, et supposons que G a exactement trois classes de conjugaison.

(a) En considérant l'opération de G sur lui même par conjugaisons, montrer qu'on a

$$1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \tag{2}$$

avec des entiers $a \geq b > 0$ tels que $a|n$ et $b|n$.

(b) Déterminer toutes les solutions de l'équation (1) en entiers $n \geq a \geq b > 0$ tels que $a|n$ et $b|n$.

(c) Donner la liste complète des groupes finis, à isomorphisme près, qui ont exactement trois classes de conjugaison.

Exercice 17. Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G.

(a) Montrer que les parties HgK, où $g \in G$, constituent une partition de G.

(b) Soit $g \in G$. Montrer que $N_g = \{(h, k) \in H \times K \mid hg = gk\}$ est un sous-groupe de $H \times K$.

(c) On suppose que G est fini et que $HK = G$. Montrer que $|N_g|$ ne dépend que du $|H|$ et $|K|$ et non de $g \in G$.
Calculer sa valeur pour $g = e$ et en déduire que $|G| \times |H \cap K| = |H| \times |K|$.
Donner une autre démonstration de cette égalité lorsque $H \triangleleft G$.

Exercice 18. Soit G un groupe d'ordre $2p$, avec $p > 2$ premier.

(a) Montrer que G admet deux sous-groupes H et K d'ordre p et 2 respectivement.

(b) Montrer que $G = HK$, $H \triangleleft G$ et $H \cap K = \{e\}$.

(c) Montrer que G est isomorphe au groupe diédral D_{2p}.