CPU MPI 2ème année – Compléments d'algèbre et d'algèbre linéaire

Feuille 3 : groupes et actions de groupes

Exercice 1 :

Soit G un sous-groupe du groupe des transformations linéaires $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$. On fait agir G sur le plan affine euclidien en choisissant un point O de cet espace et en identifiant $\mathbb{R}^2$ et les vecteurs d'origine O. Décrire l'orbite d'un point A quand G est le sous-groupe engendré par

1. une symétrie par rapport à une droite D passant par O ;
2. une rotation d'angle $\pi/2$ de centre O ;
3. une rotation d'angle $2\pi/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ de centre O et une symétrie par rapport à une droite D passant par O.

Exercice 2 :

Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ opérant sur $\{1, 2, 3, 4\}$ par l'action naturelle de $\mathfrak{S}_4$. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note O_i l'orbite de i et S_i le stabilisateur de i. Déterminer O_i et S_i pour les cas suivants :

1. G est le groupe engendré par le 3-cycle (1 2 3).
2. G est le groupe engendré par le 4-cycle (1 2 3 4).
3. G est le groupe engendré par les double transpositions.
4. $G = \mathcal{A}_4$.

Exercice 3 :

1. Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}^* \right\}$. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2. On considère l'ensemble des matrices colonnes $X = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Pour $g \in G$ et $x \in X$, on pose $g * x = gx$. Montrer que cela définit une action du groupe G sur l'ensemble X.
3. Soit $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'orbite $G * x$ et le stabilisateur S_x.
4. Soit $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'orbite $G * y$ et le stabilisateur S_y.
5. Soit $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'orbite $G * z$ et le stabilisateur S_z.
6. En déduire que X est la réunion de quatre orbites.

Exercice 4 :

Un groupe de 35 éléments agit sur un ensemble à 19 éléments sans fixer aucun d'entre eux. Combien y-a-t-il d'orbites ? Combien d'éléments contiennent-elles ?

Exercice 5 : *Théorème de Burnside.*

Soit G un groupe fini. On dit qu'un élément $x \in G$ est *central* s'il commute avec tous les autres éléments de G. On suppose désormais que G est un p-groupe, autrement dit un groupe d'ordre p^r pour un nombre premier p et un exposant $r \geq 1$.

On considère l'action de G sur lui-même par conjugaison : $(g, x) \mapsto g * x := gxg^{-1}$.

1. Démontrer que x est central si et seulement si son orbite sous cette action est de cardinal 1.
2. En utilisant l'équation des classes, établir que dans un p-groupe, le nombre d'éléments centraux est un multiple de p.

3. En déduire que dans un p-groupe, il existe au moins un élément central différent de e.
4. Observer que le groupe diédral D_8, formé par 4 rotations (dont l'identité) et 4 symétries axiales, est un 2-groupe. Il possède donc au moins un élément central distinct de l'identité ; lequel ?

Exercice 6 : *Formule de Burnside.*

Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E. On note par r le nombre d'orbites. Démontrer que

$$r = \frac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum_{g \in G} \mathrm{card}\{x \in E;\ g \cdot x = x\}$$

(on pourra déterminer de deux façons le cardinal de l'ensemble $X = \{(g, x) \in G \times E;\ g \cdot x = x\}$).

Exercice 7 :

Soit G un groupe fini et soit H un sous-groupe de G.

1. On définit une relation binaire sur G : si $x, y \in G$, on pose $x \sim_H y$ si $y^{-1}x \in H$.
   (a) Montrer que cela définit une relation d'équivalence sur G.
   (b) Puis montrer que la classe d'équivalence de x est l'ensemble $xH = \{xh : h \in H\}$ et qu'il possède $|H|$ éléments.
   (c) En déduire que $|G| = k|H|$ où $k \geq 1$ est un entier égal au cardinal de l'ensemble quotient $G/\sim_H$.
   Remarque : on vient de redémontrer le théorème de Lagrange. On note habituellement G/H au lieu de $G/\sim_H$ et l'entier k est appelé "'l'incide de H dans G".
2. Soit $g \in G$.
   (a) Montrer que l'ensemble $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$ est un sous-groupe de G et que l'application $f_g : H \to gHg^{-1}$, $h \mapsto ghg^{-1}$ est un isomorphisme de groupes.
   (b) Montrer que si $g \sim_H g'$ alors $gHg^{-1} = g'Hg'^{-1}$. En déduire qu'il existe une liste d'éléments $g_1, \ldots, g_k$ de G tels que $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} = \bigcup_{i=1}^{k} g_i H g_i^{-1}$, où k est "l'indice de H", c'est-à-dire l'entier de la question 1.(c).
   (c) En déduire que
   $$\mathrm{card} \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \leq 1 + k(|H| - 1).$$
   On suppose que H est un sous-groupe strict de G, autrement dit $H \subsetneq G$. Montrer qu'alors $k \geq 2$ puis qu'on a $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \subsetneq G$.
3. On suppose ici $G = \mathfrak{S}_n$ avec $n \geq 3$.
   (a) Soit H le sous-groupe engendré par la transposition $\tau = (1, 2)$. Que vaut k dans ce cas et à quoi est égal $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$? Est-ce un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$?
   (b) Donner un exemple d'un sous-groupe $K \subset \mathfrak{S}_n$ strict non trivial tel que $gKg^{-1} = K$ pour tout $g \in G$.
4. De nouveau G désigne un groupe fini quelconque. On suppose que G opère sur un ensemble E. Pour $x \in E$ on note par O_x l'orbite de x et S_x le stabilisateur de x.
   (a) Soient $x, y \in E$ deux éléments appartenant à la même orbite, de sorte qu'il existe $g \in G$ tel que $y = g * x$. Montrer que $S_y = gS_xg^{-1}$.
   (b) On suppose que l'action de G sur E est transitive et que $\mathrm{card}\, E \geq 2$. Montrer qu'il existe alors un élément de G qui ne fixe aucun point de E.