



Algèbre 2 – Feuille 4
Groupes de permutations

Exercice 1. On considère la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{10}$ définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 2 & 5 & 10 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

- (a) Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
- (b) Calculer l'ordre de σ dans \mathfrak{S}_{10} .
- (c) Calculer σ^{4781} .
- (d) Calculer la signature de σ .

Exercice 2. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ définie par

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \sigma(k) = n + 1 - k.$$

Décomposer σ en produit de cycles deux à deux disjoints.

Exercice 3. On considère les deux permutations suivantes de \mathcal{S}_8

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que σ et τ sont conjugués.
- (b) Trouver une permutation γ telle que $\tau = \gamma \circ \sigma \circ \gamma^{-1}$; combien y-a-t-il de telles permutations $\gamma \in \mathfrak{S}_8$?

Exercice 4. Soit p un nombre premier et soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ d'ordre p .

- (a) Montrer que les σ -orbites sont de cardinal 1 ou p .
- (b) En déduire que si $n < 2p$, alors σ est un cycle.

Exercice 5. Soit $n \geq 3$. Montrer que pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{\text{Id}\}$, il existe une transposition qui ne commute pas à σ .
En déduire que le centre de \mathcal{S}_n est $Z(\mathcal{S}_n) = \{\text{Id}\}$.

Exercice 6. Soit (i_1, i_2, \dots, i_r) un cycle de longueur paire. Montrer que σ^2 n'est pas un cycle.

Exercice 7. Soit $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ un r -cycle de longueur $r \geq 2$.

(a) Montrer que, pour $x \in \text{Supp}(\sigma)$ et $j \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sigma^j(x) = x \iff r \text{ divise } j.$$

(b) Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\text{Supp}(\sigma^m) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } r \text{ divise } m \\ \text{Supp}(\sigma) & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) Montrer que, pour $x \in \text{Supp}(\sigma)$ et $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\text{card}(\text{Orb}_{\sigma^m}(x)) = \frac{r}{r \wedge m}$$

(d) Montrer que pour $m \in \mathbb{Z}$ non multiple de r , σ^m est un cycle si, et seulement si, m est premier avec r .

Exercice 8. Déterminer l'ordre maximal d'un élément de \mathfrak{S}_5 .

Exercice 9. (a) Soit G un groupe d'ordre $2n$ et H un sous-groupe de G d'ordre n (donc d'indice 2). Montrer que pour tout $g \in G$, $g^2 \in H$.

(b) Montrer que \mathcal{A}_4 (qui est d'ordre 12) n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 10. Montrer que \mathcal{A}_n est un sous-groupe caractéristique de \mathcal{S}_n (c-à-d. stable par tout automorphisme de \mathcal{S}_n).

Exercice 11. Soit E un ensemble de cardinal $n \geq 4$. Montrer que les produits de deux transpositions disjointes sont conjugués dans $\mathcal{A}(E)$.

Exercice 12. Décomposer en produit de 3-cycle dans \mathcal{A}_7 la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Le groupe \mathfrak{S}_n est-il isomorphe au produit direct $\mathcal{A}_n \times \{-1, 1\}$?

Exercice 14. Soit $n \geq 5$.

- (a) Montrer que deux 3-cycles sont conjugués dans \mathcal{A}_n .
- (b) Vérifier que ce résultat n'est pas vrai pour \mathcal{A}_4 et \mathcal{A}_3 .
- (c) En déduire que le groupe dérivé $D(\mathcal{A}_n)$ de \mathcal{A}_n (c-à-d. le groupe engendré par les commutateurs $[\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ où $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n$) est \mathcal{A}_n .

Exercice 15. Déterminer, pour $n \geq 4$, le centre $Z(\mathcal{A}_n)$ de \mathcal{A}_n .

Exercice 16. Soit $n \geq 5$. Montrer que les sous-groupes distingués de \mathfrak{S}_n sont $\{\text{Id}\}$, \mathcal{A}_n et \mathfrak{S}_n .

Exercice 17. On se propose de montrer que le groupe alterné \mathcal{A}_5 est simple (c-à-d. n'a pas de sous-groupes distingués autres que lui-même et $\{\text{Id}\}$).

- (a) Donner une description de \mathcal{A}_5 en classant ses éléments en fonction de leur ordre.
- (b) Montrer que \mathcal{A}_5 est un groupe simple.