UNIVERSITÉ DE LORRAINE L3 Mathématiques – Site Nancy, S5 – 2022-2023

Algèbre 2 – Feuille 5

Généralités sur les anneaux

Exercice 1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \left\{a + b\sqrt{d} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Exercice 2. Déterminer le plus petit sous-anneau unitaire de $\mathbb{C}$ contenant i.

Exercice 3. (a) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}$.

(b) On considère sur l'anneau des entier de Gauss

$$\mathbb{Z}[i] = \left\{a + ib \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

et l'application définie par $\forall z \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = z\bar{z}$.

(i) Vérifier que pour tout $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) \in \mathbb{N}$ et $N(zz') = N(z)N(z')$.

(ii) Montrer que $\mathbb{Z}[i]^\times = \{z \in \mathbb{Z}[i],\ N(z) = 1\}$

(iii) En déduire les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

(c) De la même façon déterminer les éléments inversibles de l'anneau

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \left\{a + ib\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

Exercice 4. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{d}] = \left\{a + ib\sqrt{d} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}$$

(a) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est un anneau commutatif et intègre.

(b) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est contenu dans tout sous-anneau unitaire de $\mathbb{C}$ qui contient $i\sqrt{d}$.

(c) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est égal à l'intersection de tous les sous-anneaux unitaires de $\mathbb{C}$ qui contiennent $i\sqrt{d}$.

(d) Déterminer l'ensemble $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]^\times$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$.

Exercice 5. On appelle anneau de Boole un anneau A vérifiant : $\forall x \in A$, $x^2 = x$.

(a) Soit A un anneau de Boole

(i) Montrer que $\forall x \in A$, $x + x = 0_A$

(ii) Montrer que A est commutatif. Dans quel cas A est-il intègre ?

(b) Soit E un ensemble non vide et soit $A = \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Montrer que $(A, \Delta, \cap)$ est un anneau de Bolle, où Δ désigne la différence symétrique des ensembles définie par $X\Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$

Exercice 6. Soient a, b deux éléments d'un anneau commutatif A. Montrer que si le produit ab est inversible, alors a et b sont inversibles.

Exercice 7. On note

$$\mathcal{D} = \left\{\frac{n}{10^k} \mid n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\right\}$$

l'ensemble des nombres décimaux.

(a) Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

(b) Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{D}$ est

$$\mathcal{D}^\times = \{\pm 2^\alpha 5^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$$

(c) Montrer que les idéaux de $\mathcal{D}$ sont exactement les ensembles $n\mathcal{D}$, où n est un entier naturel non divisible par 2 et par 5. Etant donné un idéal I de $\mathcal{D}$, on pourra considérer l'intersection $I \cap \mathbb{Z}$.

Exercice 8. Soit

$$A = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}^\star,\ \text{impair}\right\}$$

a) Montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

b) Quels en sont les éléments inversibles ?

Exercice 9. On appelle nilradical d'un anneau commutatif A l'ensemble N formé des éléments nilpotents de A i.e. des $x \in A$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $x^n = 0_A$.

Montrer que N est un idéal de A.

Exercice 10. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, on note

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \left\{a + b\sqrt{d} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$$

Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{d}], +, \times)$ est un corps.

Exercice 11. Soit A un anneau intègre fini. Montrer que A est un corps. (on pourra introduire l'application $x \mapsto ax$ pour $a \in A, a \neq 0_A$)

Exercice 12. Soit k un corps. Soit $(A, +, \cdot, \times)$ où $+$ et $\times$ sont des lois de composition interne sur A, et $\cdot$ est une application $k \times A \to A$. On dit que $(A, +, \cdot, \times)$ est une k-algèbre si $(A, +, \cdot)$ munit A d'une structure de k-espace vectoriel et $(A, +, \times)$ est un anneau, et si l'application produit $\times : A \times A \to A$ est k-bilinéaire.

1. Montrer qu'une k-algèbre de dimension finie sur k et intègre est un corps. (on pourra à nouveau introduire l'application $x \mapsto ax$ pour $a \in A, a \neq 0_A$)
2. Montrer que tout sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ de dimension finie et stable par multiplication est un corps.
3. Donner une nouvelle preuve du fait que $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ est un corps.
4. Montrer que $K = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est un corps.

Exercice 13. Soit A un anneau intègre. On suppose que l'anneau A ne possède qu'un nombre fini d'idéaux. Montrer que A est un corps.