Algèbre 2

Partiel du 09/11/2018

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 2h

Exercice 1. (1) Déterminer tous les éléments d'ordre 9 du groupe $\mathbb{U}_{45}$.
(2) Déterminer tous les sous-groupes du groupe $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit G un groupe **non-abélien** d'ordre $8 = 2^3$.

(1) Montrer que G ne possède pas d'éléments d'ordre 8.

(2) Montrer que si G ne possède pas d'éléments d'ordre 4 alors G est abélien. En déduire qu'il existe un élément $a \in G$ d'ordre 4; on notera $H = \langle a \rangle$ le sous-groupe engendré par a.

(3) Calculer $[G : H]$. Montrer que que H est distingué dans G et qu'il existe $b \in G$, $b \notin H$ tel que $G = H \cup Hb$.

(4) Montrer que $G = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

(5) Montrer que $b^{-1}ab \in H$ et calculer l'ordre de $b^{-1}ab$. En déduire que $b^{-1}ab = a$ ou $b^{-1}ab = a^3$. (utiliser les propriétés des groupes cycliques).

(6) Montrer que si $b^{-1}ab = a$ alors G est abélien. En déduire que $b^{-1}ab = a^3$

(7) Montrer que $b^2 \in H$, $b^2 \neq a$ et $b^2 \neq a^3$. En déduire que $b^2 = e$ ou $b^2 = a^2$.

(8) On suppose que $b^2 = e$. Déterminer la table de G; on notera G_1 le groupe obtenu.

(9) On suppose que $b^2 = a^2$. Déterminer la table de G; on notera G_2 le groupe obtenu.

(10) Les groupes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes? (observer les ordres des éléments de G_1 et G_2).

Exercice 3. Dans cet exercice on admet le résultat suivant :

Lemme 1. Si G est un groupe fini et si H et K sont deux sous-groupes distingués de G tels que $H \cap K = \{e\}$ et $|G| = |H| \times |K|$, alors $G \simeq H \times K$.

Soit $p \geq 2$ un nombre premier.

(1) Soit G groupe fini d'ordre p^2 (donc abélien).

(a) Montrer que si G possède un élément d'ordre p^2, alors $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que si G ne possède aucun élément d'ordre p^2, alors $G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. (On pourra considérer les deux sous-groupes $\langle x \rangle$, et $\langle y \rangle$ où $x \in G$, $x \neq e$ et $y \in G$, $y \notin \langle x \rangle$ et penser au Lemme 1).

(2) Soit G un groupe **abélien** d'ordre p^3.

(a) Montrer que si G possède un élément d'ordre p^3, alors $G \simeq \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$.

t.s.v.p.

(b) Montrer que si tous les éléments de $G \setminus \{e\}$ sont d'ordre p, alors $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3$ (on pourra utiliser à deux reprises le Lemme 1).

On suppose que G ne possède pas d'éléments d'ordre p^3, mais au moins un éléments x d'ordre p^2. Soit $H = \langle x \rangle$ le sous-groupe engendré par x.

(c) On suppose qu'en dehors de H tous les éléments de G sont d'ordre p^2. Montrer que G contient $p^3 - p$ éléments d'ordre p^2 (utiliser les propriétés des groupes cycliques). En déduire que G contient $p - 1$ éléments d'ordre p.

Considérons maintenant l'application $\phi : G \to G$ tel que $g \mapsto \phi(g) = g^p$. Vérifier que ϕ est un morphisme de groupes, déterminer l'image des éléments d'ordre p^2 puis compter le nombre d'antécédents d'un élément de l'image de ϕ d'ordre p. Aboutir à une contradiction.

(d) En déduire qu'il existe un élément $y \in G$, $y \notin H$ d'ordre p et que $G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (on pourra utiliser le Lemme 1).

(3) Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 8 (utiliser les conclusions des exercices 2 et 3).