Algèbre 2

Examen final du 16/01/2019,

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 3h

Exercice 1. Donner, à isomorphisme prés, la liste des groupes abéliens d'ordre 36.

Exercice 2. (a) Quel est le nombre d'éléments $x \in (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^{\times}$ tels que $x^4 = 1$?

(b) Résoudre $x^4 = 1$ dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^{\times}$.

Exercice 3. Dans les groupes suivants, donner un exemple d'élément d'ordre 4 s'il en existe, ou sinon donner un argument pour justifier qu'il en existe pas :

(a) Le groupe linéaire $GL_2(\mathbb{R})$;

(b) Le groupe alterné A_8;

(c) Un groupe d'ordre 16 (ici il s'agit de décider si tout groupe d'ordre 16 admet un élément d'ordre 4).

Exercice 4. Considérons les deux éléments suivants du groupe symétrique S_9

$$\sigma = (1\ 2)(3\ 4\ 5)(6\ 7\ 8\ 9), \quad \sigma' = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9).$$

(a) Justifier pourquoi σ et σ' sont conjugués, puis exhiber une permutation $\omega \in S_9$ telle que $\sigma' = \omega\sigma\omega^{-1}$.

(b) Quel est le cardinal de la classe de conjugaisons de σ dans S_9?

(c) Calculer l'ordre de σ.

(d) Calculer σ^{2019}.

Exercice 5. Soit $A = \mathbb{Z}[\sqrt{10}] = \{a + b\sqrt{10},\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, sous-anneau de $\mathbb{R}$. On note $N(x)$ la norme d'un élément $x = a + \sqrt{10}b$ de A, donnée par $N(x) = a^2 - 10b^2$.

(a) Vérifier que pour tous $x, y \in A$, $N(xy) = N(x)N(y)$.

(b) Montrer qu'un élément $x \in A$ est inversible si et seulement si $N(x) \in \{1, -1\}$.

(c) Donner un exemple d'élément inversible $x \notin \{1, -1\}$.

(d) Montrer que pour $a \in \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ la condition $a^2 \in \{-3, 3\}$ n'a pas de solution. Montrer de même que la condition $a^2 \in \{-2, 2\}$ n'a pas de solution.

(e) A l'aide de la question (d), montrer que les éléments 2, 3 et $4+\sqrt{10}$ sont irréductibles dans A.

(f) En déduire que A n'est pas factoriel.

Exercice 6. (1) Déterminer les polynômes irréductibles de degré 2 dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

(2) On considère le polynôme $P(X) = 2019X^5 + 2018X^4 + 2016X^3 + 2015X^2 + 2014X + 2013 \in \mathbb{Z}[X]$.

(a) Soit $\bar{P}$ la réduction du polynôme P modulo 2. Montrer que $\bar{P}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

(b) Soit $\langle\bar{P}\rangle$ l'idéal $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ de engendré par $\bar{P}$. Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/\langle\bar{P}\rangle$ est un corps.

(c) Le polynôme P est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$? Pourquoi?