Algèbre 2

Partiel CCI2

18 octobre 2021 – durée 2h

Exercice 1. *Dans le groupe* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, *trouver les ordres des matrices suivantes*

$$a_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-i\end{pmatrix},\qquad a_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$
$$a_3=\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix},\quad a_4=\begin{pmatrix}2&-3i\\1&+i\end{pmatrix}?$$

Corrigé l'exercice 1. *On a ,* $a_1\neq I_2$, $a_1^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\neq I_2$, $a_1^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}\neq I_2$ *et* $a_1^4=I_2$ *Donc* $o(a_1)=4$.

On montre de même que $o(a_3)=4$.

Ensuite, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $a_2^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}\neq I_2$. *Donc* a_2 *est d'ordre infini.*

Finalement, si a_4 *est d'ordre fini, alors il existe* $n\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $a_4^n=I_2$. *Ceci conduit à* $\det(a_4^n)=1$. *Mais* $\det(a_4^n)=(\det a_4)^n=(5i)^n=5^ni^n\neq 1$, *pour tout entier* $n\in\mathbb{N}^*$. *Donc* a_4 *est d'ordre infini.*

Exercice 2. *Soient* G *un groupe,* H *un sous-groupe distingué de* G *et* K *un sous-groupe de* G.

(1) Montrer que $HK=KH$ *et que* KH *est un sous-groupe de* G.

(2) Montrer que H *est un sous-groupe distingué de* KH *et que* $K\cap H$ *est un sous-groupe distingué de* K.

(3) On considère l'application $f\colon K\to KH/H$ *qui à tout élément* $k\in K$ *on associe* $f(k)=\bar{k}$, *où* $\bar{k}=kH$ *est la classe de* k *modulo le sous-groupe* H.

(a) Montrer que f *est un morphisme de groupes surjectif.*

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)=K\cap H$.

(c) En déduire que les groupes KH/H *et* $K/(K\cap H)$ *sont isomorphes.*

Corrigé l'exercice 2. *(1) Soit* $a=hk\in HK$, *alors* $a=k\left(k^{-1}hk\right)\in KH$, *car* $k^{-1}hk\in H$, *puisque* H *est distingué dans* G. *D'où* $HK\subset KH$.*L'inclusion* $KH\subset HK$ *se montre de la même façon.*
Montrons que KH *est un sous-groupe de* G.

– Soient $a_1=k_1h_1\in KH$ *et* $a_2=k_2h_2\in KH$ *avec* $k_i\in K$ *et* $h_i\in H$ *pour* $i=1,2$. *Comme* $h_1k_2\in HK=KH$, *il existe* $h_3\in H$ *et* $k_3\in K$ *tels que* $h_1k_2=k_3h_3$. *Donc*

$$a_1a_2=(k_1h_1)(k_2h_2)=k_1(h_1k_2)h_2=k_1(k_3h_3)h_2=(k_1k_3)(h_3h_2)\in KH$$

Ainsi KH *est stable par le produit.*

– Soit $a=kh\in KH$ *avec* $k\in K$ *et* $h\in H$. *On a*

$$a^{-1}=(kh)^{-1}=h^{-1}k^{-1}=k^{-1}\left(kh^{-1}k^{-1}\right)\in KH$$

car $kh^{-1}k^{-1}\in H$, *puisque* H *est distingué dans* G. *Ainsi* KH *est stable par passage à l'inverse.*

(2) H *est un sous-groupe de* KH *et* H *distingué dans* G, *donc* H *est distingué dans* KH. $K\cap H$ *est un sous-groupe de* H *et* H *distingué dans* G, *donc* $K\cap H$ *est distingué dans* G. *Comme* $K\cap H$ *est un sous-groupe de* K, *il est distingué dans* K.

(3) (a) Soient $k_1,k_2\in K$. *On a*

$$f(k_1k_2)=(k_1k_2)H=(k_1H)(k_2H)=f(k_1)f(k_2)$$

donc f *est un morphisme de groupes. De plus si* $x\in KH/H$, *alors il existe* $a=kh\in KH$ *tel que* $x=aH=(kh)H=k(hH)=kH=f(k)$. *D'où la surjectivité de* f.

(b) Soit $k\in K$, *On a*

$$k\in\mathrm{Ker}(f)\Longleftrightarrow f(k)=H\Longleftrightarrow kH=H\Longleftrightarrow k\in H$$

donc $k\in K\cap H$ *et* $\mathrm{Ker}(f)\subset K\cap H$. *L'autre inclusion est évidente.*

(c) D'après le théorème d'isomorphisme, $K/\mathrm{Ker}(f)\simeq\mathrm{Im}(f)$, *donc* $K/(K\cap H)\simeq KH/H$

Exercice 3. *Soit* G *l'ensemble des matrices de la forme* $\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}$ *où* a,b,c *sont des nombres réels tels que* $ac\neq 0$.

(1) Vérifier que G *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ *et que* G *est non abélien.*

(2) Soit H *l'ensemble des éléments de* G *pour lesquels* $a=c=1$. *Prouver que* H *est un sous-groupe de* G *isomorphe au groupe* $(\mathbb{R},+)$.

(3) (a) Déterminer dans le groupe G *tous les éléments d'ordre* 2.

(b) Donner un exemple de deux matrices de G *d'ordre 2 dont le produit est d'ordre infini.*

(4) Montrer que G *opère sur* $\mathbb{R}$ *par l'application*

$$\left(\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix},x\right)\mapsto\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\cdot x=\frac{ax+b}{c}$$

(5) Déterminer le stabilisateur et la G-orbite de 0. Cette action est-elle transitive ?

Corrigé l'exercice 3. *(1) Il est facile de montrer que G est un sous-ensemble de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ stable par le produit et par passage à l'inverse, donc un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Il est évidemment non abélien, car par exemple*

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

(2) Il est aussi facile de montrer que H est un sous-groupe de G. Soit l'application

$$f\colon H \ni \begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix} \mapsto b \in \mathbb{R}$$

On a

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b'\\0&1\end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix}1&b+b'\\0&1\end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}1&b'\\0&1\end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Donc f est un morphisme de $(H,\times)$ dans $(\mathbb{R},+)$. De plus $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$ car f est surjectif. Finalement $\mathrm{Ker}\, f = \{I_2\}$, car si $\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, f$, alors $b=0$. Ainsi f est un isomorphisme et on a $H \simeq \mathbb{R}$.

(3) (a) Soit $g = \begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix} \in G$. Alors $o(g)=2$ si et seulement si $g \neq I_2$ et $g^2 = I_2$. On a

$$\begin{aligned} g^2 = I_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 = 1 \\ c^2 = 1 \\ b(a+c) = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1 & \text{ou } a = -1 \\ c = 1 & \text{ou } c = -1 \\ a+c = 0 & \text{ou } b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$(a,b,c) \in \{(1,b,-1),(-1,b,1),(1,0,-1),(-1,0,1),(-1,0,-1)\}$$

A cette liste il faut enlever le cas $(a,b,c)=(1,0,1)$ qui donne I_2. Par conséquent, les éléments d'ordre 2 de G sont

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}-1&b\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&b\\0&-1\end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R}$$

(b) Les deux éléments $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$ sont d'ordre deux, mais leur produit $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ est d'ordre infini (voir exercice 1).

(4) L'application est bien définie. Ensuite il est claire que $I_2 \cdot x = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soient $g_i = \begin{pmatrix}a_i&b_i\\0&c_i\end{pmatrix}$, $i=1,2$ deux éléments de G et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$g_1g_2 = \begin{pmatrix}a_1a_2 & a_1b_2+b_1c_2\\0 & c_1c_2\end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} g_1\cdot(g_2\cdot x) &= \frac{a_1(g_2\cdot x)+b_1}{c_1} \\ &= \frac{a_1\left(\frac{a_2x+b_2}{c_2}\right)+b_1}{c_1} \\ &= \frac{a_1a_2x+a_1b_2+b_1c_2}{c_1c_2} \\ &= (g_1g_2)\cdot x \end{aligned}$$

On a donc bien une action de G sur $\mathbb{R}$.

(5) Soit $g = \begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix} \in G$. On a

$$\begin{aligned} g \in G_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad g\cdot 0 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad b = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad g = \begin{pmatrix}a&0\\0&c\end{pmatrix},\ \text{avec } ac \neq 0 \end{aligned}$$

Donc le stabilisateur de 0 est le sous-groupe

$$\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&c\end{pmatrix},\ \text{avec } ac\neq 0\right\}.$$

Déterminons l'orbite de 0 :

$$\begin{aligned} G\cdot 0 &= \{g\cdot 0, g\in G\} \\ &= \{\frac{b}{c},\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}^*\} = \mathbb{R} \end{aligned}$$

On peut déduire alors qu'il y a une seule orbite et par conséquent l'action est transitive.

Exercice 4. *Soit G un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$; on considère G comme opérant de façon naturelle sur $\mathbb{N}_4 = \{1,2,3,4\}$.*

Pour chacun des groupes G suivants, déterminer la G-orbite et le stabilisateur de chaque élément $k\in\mathbb{N}_4$:

(1) $G = \langle(1,2,3)\rangle$;

(2) $G = \langle(1,2),(3,4)\rangle$.

Corrigé l'exercice 4. *(1) (a) Soit*

$$G = \langle\sigma = (1,2,3)\rangle = \{Id,\sigma,\sigma^2\} = \{Id,(1,2,3),(1,3,2)\}$$

et

$\sigma(1) = 2, \sigma^2(1) = 3, \sigma^3(1) = 1$, donc $O_1 = G\cdot 1 = \{1,2,3\}$;

$\sigma(2) = 3, \sigma^2(2) = 1, \sigma^3(2) = 2$, donc $O_2 = G\cdot 2 = \{1,2,3\}$;

$\sigma(3) = 1, \sigma^2(3) = 2, \sigma^3(3) = 3$, donc $O_3 = G\cdot 3 = \{1,2,3\}$;

$\sigma(4) = 4$, donc $O_4 = G\cdot 4 = \{4\}$.

Pour $k = 1,2,3$, on a $\mathrm{card}(O_k) = 3$. Comme $|G|/|G_k| = \mathrm{card}(O_k)$ et que $|G| = 3$, on trouve $|G_k| = 1$ par conséquent $G_k = \{Id\}$.

Pour $k = 4$, on a $|G|/|G_4| = \mathrm{card}(O_4)$=1, donc $|G_4| = |G|$ et $G_4 = G$.

(2) Soit

$$\begin{aligned} G &= \langle\tau_{12} = (1,2), \tau_{34} = (3,4)\rangle, \\ &= \{Id,\tau_{12},\tau_{34},\tau_{12}\tau_{34}\}. \end{aligned}$$

Il est d'ordre 4. On a

$\tau_{12}(1) = 2$, $\tau_{34}(1) = 1$ et $\tau_{12}\tau_{34}(1) = 2$. Donc $O_1 = G\cdot 1 = \{1,2\}$ et $\mathrm{card}(O_1) = 2$. Comme $|G|/|G_1| = \mathrm{card}(O_1)$ et que $|G| = 4$, on trouve $|G_1| = 2$. Comme τ_{34} fixe 1, il s'ensuite que $G_1 = \{Id,\tau_{34}\}$.

De même $O_2 = G\cdot 2 = \{1,2\}$ et $G_2 = \{Id,\tau_{34}\}$.

Un raisonnement similaire, donne

$O_3 = G\cdot 3 = O_4 = G\cdot 4 = \{3,4\}$ et $G_3 = G_4 = \{Id,\tau_{12}\}$.

Exercice 5. *Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E.*

(1) On suppose que l'action de G sur E est telle que $E_G = \varnothing$, E_G étant l'ensemble des points fixes de E.

Si $|G| = 15$ et $\mathbf{card}(E) = 17$, trouver le nombre de G-orbites et le cardinal de chacune d'elles.

(2) Montrer que, si $|G| = 33$ et $\mathbf{card}(E) = 19$, alors nécessairement E_G est non vide.

Corrigé l'exercice 5. *(1) Le cardinal de chaque orbite divise $|G| = 15$. Donc les cardinaux possibles des orbites sont 1, 3, 5 et 15. Par hypothèse, il n' y a pas d'orbite de cardinal 1. Donc d'après l'équation des classes*

$$17 = n_1\times 3 + n_2\times 5 + n_3\times 15,$$

où

n_1 est le nombre d'orbites de cardinal 3,

n_2 est le nombre d'orbites de cardinal 5, et

n_3 est le nombre d'orbites de cardinal 15.

On peut remarquer tout de suite que $n_3 = 0\in\{0,1\}$. Si $n_1 = 1$, alors $2 = 3n_1+5n_2$ ce qui est impossible. Donc $n_3 = 0$ et par suite $17 = 3n_1+5n_2$. Modulo 5, cette équation devient $3n_1\equiv 2\ [5]$ ou encore $n_1\equiv 2\times 7\ [5]$ (car dans $\mathbb{Z}_5$, $\bar{3}^{-1} = \bar{7}$) et donc $n_1\equiv 4\ [5]$. Cette dernière égalité impose $n_1 = 4$ et par conséquent $n_2 = 1$.

Ainsi il y a 4 orbites de cardinal 3 et une orbite de cardinal 5 et aucune orbite de cardinal 15 : $17 = 3+3+3+3+5$.

(2) Supposons par l'absurde que $E_G = \varnothing$, c-à-d. il n' y a pas d'orbite de cardinal 1. Un raisonnement similaire à (1) donne l'équation des classes :

$$19 = n_1\times 3 + n_2\times 11$$

où

n_1 est le nombre d'orbites de cardinal 3, et

n_2 est le nombre d'orbites de cardinal 11.

Noter qu'il n' y a pas d'orbite de cardinal 33 car $33 > 19$. On peut tout de suite remarquer que $n_2\in\{0,1\}$. Si $n_2 = 0$, alors $19 = 3n_1$ ce qui impossible car 3 ne divise pas 19. De même si $n_2 = 1$ alors $8 = 3n_1$, ce qui est aussi impossible.

Par conséquent $E_G\neq\varnothing$.