Algèbre 2

Partiel CCI2

18 octobre 2021 – durée 2h

Exercice 1. Dans le groupe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, trouver les ordres des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3i \\ 1 & +i \end{pmatrix}?$$

Exercice 2. Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et K un sous-groupe de G.

(1) Montrer que $HK = KH$ et que KH est un sous-groupe de G.

(2) Montrer que H est un sous-groupe distingué de KH et que $K \cap H$ est un sous-groupe distingué de K.

(3) On considère l'application $f \colon K \to KH/H$ qui à tout élément $k \in K$ on associe $f(k) = \bar{k}$, où $\bar{k} = kH$ est la classe de k modulo le sous-groupe H.

(a) Montrer que f est un morphisme de groupes surjectif.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = K \cap H$.

(c) En déduire que les groupes KH/H et $K/(K \cap H)$ sont isomorphes.

Exercice 3. Soit G l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des nombres réels tels que $ac \neq 0$.

(1) Vérifier que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ et que G est non abélien.

(2) Soit H l'ensemble des éléments de G pour lesquels $a = c = 1$. Prouver que H est un sous-groupe de G isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$.

(3) (a) Déterminer dans le groupe G tous les éléments d'ordre 2.

(b) Donner un exemple de deux matrices de G d'ordre 2 dont le produit est d'ordre infini.

(4) Montrer que G opère sur $\mathbb{R}$ par l'application

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, x\right) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax + b}{c}$$

(5) Déterminer le stabilisateur et la G-orbite de 0.
Cette action est-elle transitive?

t.s.v.p.

Exercice 4. Soit G un sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$; on considère G comme opérant de façon naturelle sur $\mathbb{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$.

Pour chacun des groupes G suivants, déterminer la G-orbite et le stabilisateur de chaque élément $k \in \mathbb{N}_4$:

(1) $G = \langle(1, 2, 3)\rangle$;

(2) $G = \langle(1, 2), (3, 4)\rangle$.

Exercice 5. Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E.

(1) On suppose que l'action de G sur E est telle que $E_G = \varnothing$, E_G étant l'ensemble des points fixes de E.

Si $|G| = 15$ et $\mathbf{card}(E) = 17$, trouver le nombre de G-orbites et le cardinal de chacune d'elles.

(2) Montrer que, si $|G| = 33$ et $\mathbf{card}(E) = 19$, alors nécessairement E_G est non vide.