Université de Lorraine **L2 - Algèbre linéaire 2**

Corrigé du CCI3 du 15 décembre 2020

Exercice 1: 1) cf. cours.
2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Par le Théorème de Cayley–Hamilton, le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ est un polynôme annulateur de u. Par définition, le polynôme minimal $\mu_u(X)$ divise tout polynôme annulateur de u. Il résulte que $\mu_u(X)$ divise $\chi_u(X)$.
3) Le polynôme caractéristique de A_1 est $\chi_{A_1}(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)^2$. Le polynôme minimal de A_1 est un polynôme unitaire, qui divise $\chi_{A_1}(X)$ et a les mêmes racines que $\chi_{A_1}(X)$. Les possibilités sont: $X-2$ et $(X-2)^2$. Cependant $X-2$ n'est pas un polynôme annulateur de A_1 car $A_1 \neq 2I_2$. D'où $\mu_{A_1}(X) = (X-2)^2$.
On a $\chi_{A_2}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)$. Le polynôme minimal de A_2 est un polynôme unitaire, qui divise $\chi_{A_2}(X)$ et a les mêmes racines que $\chi_{A_2}(X)$. La seule possibilité est $\mu_{A_2}(X) = (X-1)(X-2)$.
On a $\chi_{A_3}(X) = \begin{vmatrix} -X & 0 \\ 0 & -X \end{vmatrix} = X^2$. Dans ce cas, les possibilités pour le polynôme minimal sont X et X^2. Or X est effectivement un polynôme annulateur de A_3 puisque $A_3 = 0$. Donc $\mu_{A_3}(X) = X$.
On a $\chi_{A_4}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 0 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^3$. Dans ce cas, les possibilités pour le polynôme minimal sont $X-1$, $(X-1)^2$, $(X-1)^3$. Or $X-1$ n'est pas un polynôme annulateur de A_4 puisque $A_4 \neq I_3$, et $(X-1)^2$ n'est pas un polynôme annulateur de A_4 puisque $(A_4 - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La seule possibilité restante est donc la bonne: $\mu_{A_4}(X) = (X-1)^3$ (autrement dit $\mu_{A_4}(X) = -\chi_{A_4}(X)$, et on n'a pas besoin de vérifier que ce polynôme est annulateur de A_4, c'est automatiquement impliqué par le théorème de Cayley–Hamilton).
On a $\chi_{A_5}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1 & 2-X & 0 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)^2$ donc les possibilités pour le polynôme minimal de A_5 sont $(X-1)(X-2)$ et $(X-1)(X-2)^2$. Or le polynôme $(X-1)(X-2)$ n'est pas annulateur de A_5 car

$$(A_5 - I_3)(A_5 - 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

D'où: $\mu_{A_5}(X) = (X-1)(X-2)^2$.

Exercice 2: 1) On trouve $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

2) On a $\chi_N(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = (-X)^3 = -X^3$. On obtient alors $\chi_N(N) = -N^3 = 0$ d'après la question 1).
3) Si λ est une racine de χ_N, alors λ est une valeur propre de N, puisque d'après le cours les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de la matrice. Par définition, cela signifie qu'il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{K}^n$ (que l'on écrit comme une matrice colonne) tel que $Nv = \lambda v$.
4) D'une part comme N^n est la matrice nulle, on a $N^n v = 0$.
D'autre part, on montre par récurrence sur $k \geq 1$: $N^k v = \lambda^k v$. L'initialisation découle de la formule $Nv = \lambda v$ obtenue dans la question 3). Pour l'hérédité, supposons la propriété vraie au rang $k \geq 1$, et écrivons $N^{k+1}v = N(N^k v) = N(\lambda^k v) = \lambda^k \cdot (Nv) = \lambda^k \cdot (\lambda v) = \lambda^{k+1}v$. Ainsi on obtient la propriété au rang $k+1$ et cela achève la récurrence. En posant $k = n$, on obtient alors $N^n v = \lambda^n v$.
Il résulte alors $\lambda^n v = 0$, et comme v est un vecteur non nul cela entraîne $\lambda^n = 0$ et donc $\lambda = 0$.
5) On sait que χ_N est de degré n et son coefficient dominant est $(-1)^n$. Puisqu'on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme χ_N est automatiquement scindé, et comme 0 est la seule racine de χ_N, alors on obtient $\chi_N(X) = (-1)^n X^n$.
6) On a $\chi_N(N) = (-1)^n N^n = 0$ puisque $N^n = 0$.

Exercice 3: 1) Calculons le polynôme caractéristique de f:

$$\begin{aligned}
\chi_f(X) &= \chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-X & X-2 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \quad \text{en retranchant la 2ème ligne à la 1ère} \\
&= (2-X)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \quad \text{en ajoutant la 1ère colonne à la 2ème} \\
&= (2-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} \quad \text{en développant par rapport à la 1ère ligne} \\
&= (2-X)(1-X)^2.
\end{aligned}$$

On observe que le polynôme caractéristique est scindé. D'après le cours, cela entraîne que f est trigonalisable.
2) On a $\dim E_1(f) = 3 - \text{rang}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = 3 - \text{rang}(A - I_3)$. Or

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On observe que les colonnes C_1 et C_3 ne sont pas colinéaires tandis que C_2 est multiple de C_1. Cela entraîne que la matrice $A - I_3$ est de rang 2. Donc $\dim E_1(f) = 1$.

En outre on a $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $f((1,1,0)) = (1,1,0)$, ce qui entraîne que $u = (1,1,0)$ est un vecteur (non nul) appartenant à $E_1(f)$.
3) On calcule $(A - I_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = (f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})((0,0,1)) = (1,1,0) = u$.
4) On a

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\-1 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Soit $w = (x,y,z)$. On a alors

$$w \in E_2(f) \Leftrightarrow (A - 2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} -x+z & = 0\\ -x+z & = 0\\ x-y-z & = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = x\\ y = 0.\end{array}\right.$$

Ainsi, en prenant $z = x = 1$ et $y = 0$, on obtient que $w = (1,0,1)$ est un vecteur non nul de $E_2(f)$, donc un vecteur propre associé à la valeur propre 2.
La famille $(u,v,w) = ((1,1,0),(0,0,1),(1,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, par exemple, on peut observer que $e_1 = -v + w$, $e_2 = u + v - w$, $e_3 = v$, où (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ainsi les vecteurs de la base canonique sont combinaisons linéaires de u,v,w, ce qui entraîne que la famille (u,v,w) est génératrice de $\mathbb{R}^3$, et donc c'est une base puisqu'elle est composée de $3(= \dim \mathbb{R}^3)$ vecteurs.
(On peut aussi montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ en montrant qu'elle est libre. Pour montrer qu'elle est libre, on peut par exemple observer que u,v sont non colinéaires donc forment une famille libre de vecteurs du sous-espace caractéristique $C_1(f) = \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$, w est un vecteur non nul du sous-espace caractéristique $C_2(f) = \ker(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, et donc (u,v,w) est libre car les sous-espaces caractéristiques sont en somme directe. Néanmoins l'argument proposé ci-dessus où on exprime e_1,e_2,e_3 en fonction de u,v,w a l'avantage qu'il nous permettra d'exprimer ci-dessous la matrice P^{-1} de passage de (u,v,w) à la base canonique.)
Pour écrire la matrice T de f dans cette base, on rappelle que $f(u) = u$, $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})(v) = u$ donc $f(v) = u + v$, $f(w) = 2w$. D'où

$$T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base canonique à (u,v,w) est $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ et on a

$$A = PTP^{-1}.$$

Les expressions de e_1,e_2,e_3 en fonction de u,v,w obtenues ci-dessus nous permettent par ailleurs de déterminer P^{-1} qui est la matrice de passage de (u,v,w) à la base canonique:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

(Le calcul de P^{-1} n'était pas demandé dans cette question, mais il sera utile pour les questions suivantes.)
5) Pour obtenir la décomposition de Dunford–Jordan de A, on écrit d'abord

$$T = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}_{=D'} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{=N'}$$

où D' est diagonale, N' est nilpotente (car $N'^2 = 0$), et D' et N' commutent: $D' \times N' = N' \times D' = N'$. On peut écrire ensuite

$$A = P(D' + N')P^{-1} = \underbrace{PD'P^{-1}}_{=D} + \underbrace{PN'P^{-1}}_{=N}$$

où D est diagonalisable (car semblable à une matrice diagonale), N est nilpotente (car $N^2 = PN'^2P^{-1} = 0$) et D et N commutent: $DN = PD'P^{-1}PN'P^{-1} = PD'N'P^{-1} = PN'D'P^{-1} = PN'P^{-1}PD'P^{-1} = ND$. Il en découle que (D, N) est le couple correspondant à la décomposition de Dunford–Jordan de A. On calcule explicitement:

$$D = PD'P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

et

$$N = PN'P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

6) On rappelle que $f(v) = u+v$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $f^k(v) = ku+v$. Pour l'initialisation, lorsque $k = 0$, on observe que $f^0(v) = v = 0u + v$. Hérédité: supposons la propriété vraie au rang k. On a alors $f^{k+1}(v) = f(f^k(v)) = f(ku + v) = kf(u) + f(v) = ku + (u + v) = (k + 1)u + v$, en utilisant que $f(u) = u$. La propriété est vérifiée au rang $k + 1$, ce qui complète l'argument par récurrence.
Comme $f(u) = u$ et $f(w) = 2w$, on a par ailleurs $f^k(u) = u$ et $f^k(w) = 2^k w$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme T^k est la matrice de f^k dans la base (u, v, w), on obtient

$$T^k = \begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}.$$

7) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k = PT^kP^{-1}$, donc

$$A^k = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2^k - k & k + 1 - 2^k & k\\ -k & k + 1 & k\\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 4: 1) Soit $x \in F$, que l'on écrit $x = x_1 + \ldots + x_r$ avec $x_1 \in E_{\lambda_1}, \ldots, x_r \in E_{\lambda_r}$. On a alors

$$g(x) = f(x) = f(x_1) + \ldots + f(x_r) = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r$$

car $f(x_i) = \lambda_i x_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Comme $\lambda_1 x_1 \in E_{\lambda_1}, \ldots, \lambda_r x_r \in E_{\lambda_r}$, cela entraîne $g(x) \in E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_r}$ donc $g(x) \in F$. Donc F est stable par g. Ainsi g peut être considéré comme un endomorphisme de F.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, h_i est alors une composition d'endomorphismes de F, donc c'est un endomorphisme de F, on a donc en particulier $h_i(x) \in F$ pour tout $x \in F$.
2) Soient $k, l \in \{1, \ldots, r\}$ distincts de i. Quel que soit $x \in F$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{g - \lambda_k \mathrm{id}_F}{\lambda_i - \lambda_k} \circ \frac{g - \lambda_l \mathrm{id}_F}{\lambda_i - \lambda_l}(x) &= \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_l)}(g - \lambda_k \mathrm{id}_F)\big((g - \lambda_l \mathrm{id}_F)(x)\big) \\
&= \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_l)}(g(g(x)) - \lambda_k g(x) - g(\lambda_l x) + \lambda_k \lambda_l x) \\
&= \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_l)(\lambda_i - \lambda_k)}(g(g(x)) - g(\lambda_k x) - \lambda_l g(x) + \lambda_l \lambda_k x) \\
&= \frac{g - \lambda_l \mathrm{id}_F}{\lambda_i - \lambda_l} \circ \frac{g - \lambda_k \mathrm{id}_F}{\lambda_i - \lambda_k}(x).
\end{aligned}$$

D'où l'égalité

$$\frac{g - \lambda_k \mathrm{id}_F}{\lambda_i - \lambda_k} \circ \frac{g - \lambda_l \mathrm{id}_F}{\lambda_i - \lambda_l} = \frac{g - \lambda_l \mathrm{id}_F}{\lambda_i - \lambda_l} \circ \frac{g - \lambda_k \mathrm{id}_F}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

3) Soit $v \in E_{\lambda_i}$. Supposons d'abord $j = i$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{i\}$, on a

$$\frac{g - \lambda_k \mathrm{id}_F}{\lambda_i - \lambda_k}(v) = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k}(g(v) - \lambda_k v) = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k}(\lambda_i v - \lambda_k v) = v$$

car $v \in E_{\lambda_i}$. Comme $h_j = h_i = \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \frac{g - \lambda_k \mathrm{id}_F}{\lambda_i - \lambda_k}$, cela entraîne $h_j(v) = v$ dans ce cas.

Supposons ensuite $j \neq i$. En utilisant la question 2), on écrit $h_j = \left(\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{r} \frac{g - \lambda_k \mathrm{id}_F}{\lambda_j - \lambda_k} \right) \circ \frac{g - \lambda_i \mathrm{id}_F}{\lambda_j - \lambda_i}$,
et comme $\frac{g - \lambda_i \mathrm{id}_F}{\lambda_j - \lambda_i}(v) = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}(g(v) - \lambda_i v) = 0$ (car $v \in E_{\lambda_i}$) on obtient $h_j(v) = 0$ dans ce cas.
4) Il faut montrer que la somme est directe. Pour cela, on se donne des vecteurs $x_1 \in E_{\lambda_1}, \ldots, x_r \in E_{\lambda_r}$ tels que $x_1 + \ldots + x_r = 0$, et on doit montrer que cela entraîne $x_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$. D'après la question 3), on a $h_i(x_k) = 0$ si $i \neq k$ et $h_i(x_i) = x_i$ En utilisant la linéarité de h_i, on obtient alors

$$0 = h_i(0) = h_i(x_1 + \ldots + x_r) = \sum_{k=1}^{r} h_i(x_k) = x_i.$$

Ainsi on a montré que $x_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.