L3 Mathématiques – Site Nancy, S5 – 2022-2023

Algèbre 2 – Feuille 6

Anneaux euclidiens, principaux, factoriels

Exercice 1. Le but de cet exercice est de donner un exemple d'un anneau non euclidien mais principal (contre-exemple à la réciproque de l'implication euclidien ⇒ principal).

1. Soit A un anneau euclidien et soit θ un stathme euclidien de A (ie, $\forall z, w \in A$ avec $w \neq 0$, il existe $q, r \in A$ tels que $z = wq + r$ et $\theta(r) < \theta(w)$).
   (a) Montrer que θ' défini par $\theta'(x) = \min\{\theta(xu) \,|\, u \in A^\times\}$ munit A d'un nouveau stathme euclidien.
   (b) Montrer qu'on a $\forall x \in A, \forall u \in A^\times, \theta'(x) = \theta'(xu)$.
   (c) Montrer que si $u \in A^\times$, alors $\theta'(u) = \theta'(1)$. On note $n_{\text{inv}} = \theta'(1)$.
   (d) Montrer que pour $x \in A$, on a l'implication $\theta'(x) < n_{\text{inv}} \Longrightarrow x = 0$.
   (On pourra considérer x non nul tel que $\theta'(x) = \min\{\theta'(y) \,|\, y \in A \setminus \{0\}\}$, et utiliser la division euclidienne de 1 par x pour montrer que x est inversible).
   (e) Montrer qu'il existe $x \in A$ non inversible, tel que la restriction de la projection canonique $p : A \to A/xA$ à $A^\times \cup \{0\}$ soit surjective.
   (f) Etant donné un anneau A et une fonction $\theta : A \to \mathbb{N}$, le critère de Dedekind-Hasse est la condition suivante : soient $z, w \in A$ tels que $w \neq 0$ et $\theta(z) \geq \theta(w)$. Alors, soit w divise z, soit il existe $p, q, r \in \mathbb{Z}[\alpha]$ tels que
   $$pz - qw = r \neq 0 \text{ et } \theta(r) < \theta(w)\,.$$
   Montrer que si θ est un stathme euclidien, alors ce critère est vérifié.
   (g) Montrer qu'un anneau intègre muni d'une fonction $\theta : A \to \mathbb{N}$ satisfaisant le critère de Dedkind-Hasse est principal (on pourra s'inspirer de la preuve donnée en cours dans le cas euclidien).
2. On pose $\alpha = \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$ et on considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. On montre dans cette question que $\mathbb{Z}[\alpha]$ n'est pas un anneau euclidien.
   (a) Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   (b) On note pour tout $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$, $\theta(z) = z\bar{z} = |z|^2$.
   Calculer $\theta(a + b\alpha)$. Montrer que si $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$ n'est pas réel, alors $\theta(z) \geq 5$.
   (c) En utilisant θ, montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]^\times = \{\pm 1\}$.
   (d) En utilisant θ, montrer que 2 et 3 sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[\alpha]$.
   (e) En utilisant la question (1e), montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ n'est pas euclidien.
3. On montre maintenant que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un anneau principal.
   (a) Montrer que le critère de Dedekind-Hasse pour A muni de θ est impliqué par la condition : soit $z, w \in \mathbb{Z}[\alpha]$ tels que $0 < \theta(w) < \theta(z)$. Alors, soit w divise z, soit il existe $p, q \in \mathbb{Z}[\alpha]$ tels que $0 < \theta(pz/w - q) < 1$.
   (b) Soient $z, w \in \mathbb{Z}[\alpha]$ tels que $w \neq 0$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $z/w = a + b\alpha$.
   Pour x un rationnel, on note $[x]$ sa partie entière, et $\{x\}$ l'entier le plus proche de x (avec la convention $\{n + 1/2\} = n$). Pour $z = a + b\alpha \in \mathbb{Q}[\alpha]$, on note $\{z\} = \{a\} + \{b\}\alpha$.
   (c) On montre maintenant le critère de la question (3)(a) dans tous les cas :
      i. Lorsque $b \in \mathbb{Z}$, montrer que le critère est satisfait avec $p = 1$ et $q = \{pz/w\}$.
      ii. Lorsque $a \in \mathbb{Z}$ et $5b \notin \mathbb{Z}$, montrer que le critère est satisfait avec $p = \overline{\alpha}$ et $q = \{pz/w\}$.

iii. Lorsque $a \in \mathbb{Z}$ et $5b \in \mathbb{Z}$, montrer que le critère est satisfait avec $p = 1$ et $q = \{pz/w\}$ (observer que $|b - \{b\}| \leq 2/5$).

iv. Lorsque $a, b \notin \mathbb{Z}$ et $2a, 2b \in \mathbb{Z}$, montrer que le critère est satisfait avec $p = \alpha$ et $q = \{pz/w\}$.

v. Montrer que le critère est satisfait avec $p = 1$ et $q = \{pz/w\}$ lorsque $b \notin [[b] + 1/3, [b] + 2/3]$.

vi. Montrer que le critère est satisfait avec $p = 2$ et $q = \{pz/w\}$ lorsque $b \in [[b] + 1/3, [b] + 2/3]$ et $2a \notin \mathbb{Z}$ ou $2b \notin \mathbb{Z}$.

vii. Montrer que le critère de Dedekind-Hasse est toujours satisfait.

(d) Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un anneau principal.