ESPACES VECTORIELS QUOTIENTS, NOTION DE CODIMENSION

1. Espace vectoriel quotient

1.1. **Rappel : relation d'équivalence.** Soit X un ensemble, soit $\sim$ une relation binaire, i.e., deux éléments peuvent être en relation (on écrit $x \sim y$) ou pas (on écrit $x \not\sim y$).

On dit que $\sim$ est une *relation d'équivalence* lorsqu'elle satisfait les conditions suivantes :

— Réflexivité : $x \sim x$,

— Symétrie : $x \sim y$ ssi $y \sim x$,

— Transitivité : si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z$.

La *classe d'équivalence* de x est l'ensemble $\{y \in X : y \sim x\}$. On la note $\overline{x}$.

Deux classes sont soit égales : $\overline{x} = \overline{y}$ (si $x \sim y$), soit disjointes : $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$ (si $x \not\sim y$).

L'*ensemble quotient* $X/\sim$ est par définition l'ensemble des classes d'équivalence de X.

Exemple 1. Sur l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$, lorsque $n \geq 2$ est un entier, on peut définir la *relation de congruence modulo* n : on note $x \equiv y[n]$ si $x - y$ est multiple de n. L'ensemble quotient est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. C'est un ensemble fini à n éléments : $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$.

On donne d'autres exemples de relations d'équivalence, en lien avec l'algèbre linéaire (voir aussi les premiers exercices de la feuille 1) :

Exemple 2. Sur l'ensemble des matrices carrées $M_n(\mathbb{K})$, la relation de similitude est une relation d'équivalence. Pour rappel, on dit que deux matrices A, B sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Exemple 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension ≥ 2.

(a) La relation de colinéarité n'est pas une relation d'équivalence sur E. Pour rappel, on dit que x, y sont colinéaires s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x = \alpha y$ ou s'il existe $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $y = \beta x$. La relation est réflexive, symétrique, mais elle n'est pas transitive. En effet prenons deux vecteurs x, y non colinéaires. Ainsi, x est colinéaire à 0_E (car $0_E = 0x$) et 0_E est colinéaire à y (car $0_E = 0y$) mais cela n'entraîne pas que x est colinéaire à y.

(b) En revanche, sur l'ensemble $E \setminus \{0_E\}$, la relation de colinéarité est une relation d'équivalence. Sur cet ensemble, on a d'ailleurs une définition plus simple : deux vecteurs non nuls x et y sont colinéaires lorsqu'il existe un scalaire non nul $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $x = \alpha y$.

1.2. **Quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel. On associe à F une relation sur E, qui s'inspire de la relation de congruence :

Définition 1. On pose (pour $x, y \in E$) : $x \sim_F y$ si $x - y \in F$.

Propriété 1. *$\sim_F$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration.

- $x - x = 0_E \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel) donc $x \sim_F x$. La relation est donc réflexive.
- Si $x - y \in F$ alors $y - x = -(x - y) \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel). Autrement dit la relation $x \sim_F y$ entraîne $y \sim_F x$. Donc la relation est symétrique.
- Si $x - y, y - z \in F$ alors leur somme $x - z$ appartient aussi à F (car F est un sous-espace vectoriel). Autrement dit les relations $x \sim_F y$ et $y \sim_F z$ entraînent $x \sim_F z$. La relation est donc transitive.

$\square$

La relation d'équivalence $\sim_F$ donne lieu à des classes d'équivalence $\overline{x}$, et à un ensemble quotient

$$E/\sim_F = \{\overline{x} : x \in E\}.$$

Remarque : $\overline{x}$ est (par définition) l'ensemble des vecteurs $y \in E$ tels que $y \sim_F x$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tels que $y - x \in F$. Autrement dit c'est l'ensemble des vecteurs de la forme $x + f$ avec $f \in F$:

$$\overline{x} = \{x + f : f \in F\} =: x + F.$$

Lorsque $x = 0_E$, on a :

$$\overline{0_E} = \{f : f \in F\} = F.$$

Dans l'espace E nous avons une structure d'espace vectoriel (liée à deux opérations : somme et multiplication scalaire). Obtient-on une telle structure dans l'ensemble quotient ?

Propriété 2. (a) *$\sim_F$ est compatible avec l'addition : si $x, y, x', y' \in E$ avec $x \sim_F x'$ et $y \sim_F y'$, alors $x + y \sim_F x' + y'$. Cela entraîne que l'on peut définir une addition sur $E/\sim_F$ en posant :*

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x + y} \quad \textit{pour tous } \overline{x}, \overline{y} \in E/\sim_F.$$

(b) *$\sim_F$ est compatible avec le produit : si x, x' sont équivalents et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x \sim_F \lambda x'$. Cela entraîne que l'on peut définir une multiplication scalaire sur $E/\sim_F$ en posant*

$$\lambda \cdot \overline{x} := \overline{\lambda x} \quad \textit{pour tous } \overline{x} \in E/\sim_F,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

(c) *Muni de cette somme et de cette multiplication scalaire, l'ensemble quotient $E/\sim_F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément neutre $\overline{0_E}$.*

Démonstration. (a) Comme $x \sim_F x'$ on a $x - x' \in F$. De même $y - y' \in F$. D'où $(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in F$. Donc $x + y \sim_F x' + y'$.

(b) Comme $x \sim_F x'$ alors $x - x' \in F$ donc $\lambda x - \lambda x' = \lambda(x - x') \in F$. D'où $\lambda x \sim_F \lambda x'$.

(c) : exercice. □

Définition 2. L'ensemble quotient est alors noté E/F (au lieu de $E/\sim_F$) et on l'appelle *espace quotient*, ou *quotient de E par F*.

Exemple 4. Dans $E = \mathbb{R}^2$ on considère le sous-espace vectoriel

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} = \mathrm{Vect}((1, 1)).$$

On peut interpréter E comme le plan. Alors F est la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$). Pour tout "point du plan" $p = (x_0, y_0) \in E$, on a

$$\overline{p} = \{p + f : f \in F\} = \{(x_0 + \alpha, y_0 + \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

donc $\overline{p}$ est la droite d'équation $y = x + (y_0 - x_0)$; c'est la droite parallèle à F passant par p. Dans cet exemple, l'espace quotient E/F est l'ensemble des droites du plan parallèles à F.

Pour toute droite $\Delta = \overline{p}$, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \cdot \Delta = \overline{\lambda p}$. C'est la droite parallèle à F passant par le point λp, qui est l'image de p par l'homothétie de centre l'origine $O = (0, 0)$ et de rapport λ. Ainsi $\lambda \cdot \Delta$ est l'image de la droite Δ par l'homothétie de centre O et de rapport λ.

Pour deux éléments $\Delta = \overline{p}$ et $\Delta' = \overline{q}$ de E/F (deux droites du plan parallèles à F), la "somme" $\Delta = \overline{p + q}$ peut être obtenue de la façon suivante : on a sélectionné un point $p \in \Delta$ et $q \in \Delta'$ sur chaque droite. On place le point r du plan tel que $Oprq$ soit un parallélogramme. Alors $\Delta + \Delta'$ est la droite parallèle à F passant par r.

Définition 3. Lorsque l'espace quotient E/F est de dimension finie, on dit que F *est de codimension finie dans E*. La dimension de E/F est alors appelée *codimension de F dans E*, et on la note $\mathrm{codim}_E F$.

2. Surjection canonique

On a une application surjective naturelle :

$$\pi : E \to E/F,\ x \mapsto \overline{x},$$

appelée *surjection canonique.*

Propriété 3. *π est linéaire, de plus* $\operatorname{Im} \pi = E/F$ *et* $\operatorname{Ker} \pi = F$.

Démonstration. Pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\pi(\lambda x + y) = \overline{\lambda x + y} = \lambda \cdot \overline{x} + \overline{y} = \lambda \cdot \pi(x) + \pi(y),$$

ce qui montre la linéarité. Comme π est surjective, on a $\operatorname{Im} \pi = E/F$. Enfin, pour tout $x \in E$, on a :

$$x \in \operatorname{Ker} \pi \Leftrightarrow \pi(x) = \overline{0_E} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0_E} \Leftrightarrow x \in F$$

donc $\operatorname{Ker} \pi = F$. □

Exemple 5. Dans la situation de l'Exemple 4, π est l'application qui à un point $p \in E$ associe la droite parallèle à F passant par ce point.

Propriété 4. *Soit H un supplémentaire de F dans E. Alors la restriction $\pi|_H : H \to E/F$, $x \mapsto \overline{x}$ est un isomorphisme (=une application linéaire bijective).*

Démonstration. L'application $\pi|_H$ est linéaire, car c'est la restriction d'une application linéaire.

Injectivité : Soit $x \in H$. On a

$$x \in \operatorname{Ker} \pi|_H \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0_E} \Leftrightarrow x \in F.$$

Donc $\operatorname{Ker} \pi|_H = F \cap H = \{0_E\}$ (car F et H sont supplémentaires, donc en somme directe). Cela montre que $\pi|_H$ est injective.

Surjectivité : soit un élément de E/F, cet élément s'écrit sous la forme $\overline{x}$ avec $x \in E$. Comme F et H sont supplémentaires dans E, il existe un couple $(f, h) \in F \times H$ (unique) tel que $x = f + h$. Donc $x - h = f \in F$ ce qui entraîne $x \sim_F h$ et donc $\overline{x} = \overline{h} = \pi|_H(h)$. Cela montre la surjectivité. □

Corollaire 1. *(a) Quel que soit H sous-espace supplémentaire de F dans E, H et E/F sont de même dimension. En particulier, la codimension de F dans E est égale à la dimension de n'importe quel supplémentaire de F.*

(b) Si E est de dimension finie, alors $\operatorname{codim}_E F = \dim E/F = \dim E - \dim F$.

Exemple 6. (a) La codimension d'une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ est égale à 2.

(b) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = 0\}$. Soit $G \subset \mathbb{R}[X]$ le sous-espace des polynômes constants. Alors F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$. En outre, $G = \operatorname{Vect}(1)$ est une droite vectorielle. Donc F est de codimension 1 dans E.

(c) (exercice) Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Alors $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(-X) = P(X)\}$ (l'ensemble des polynômes pairs) et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(-X) = -P(X)\}$ (l'ensemble des polynômes impairs) sont deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E, et tous deux de dimension infinie. Ainsi, dans cet exemple, F (ainsi que G) est à la fois de dimension infinie et de codimension infinie dans E.

3. Passage au quotient d'une application linéaire

Rappel du cours d'algèbre : Soit X un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\sim$. Soit $f : X \to Y$ une application vers un autre ensemble. On se demande à quelle condition f "passe au quotient" en une application $\overline{f} : X/\sim \to Y$ donnée par $\overline{f}(\overline{x}) = f(y)$. (Il faut s'assurer que cette application est bien définie.)

Propriété 5. *L'application* $f : X \to Y$ *"passe au quotient" en l'application* $\overline{f} : X/\sim \to Y$, $\overline{x} \mapsto f(x)$ *bien définie si et seulement si :*

$$\forall x, x' \in X,\ x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

Nous allons essayer d'appliquer cette propriété dans notre cadre.

Propriété 6. *Soit* $f : E \to E'$ *une application linéaire. Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *et considérons la relation d'équivalence* $\sim_F$ *et l'espace quotient* E/F*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *"passe au quotient" en une application* $\overline{f} : E/F \to E'$, $\overline{x} \mapsto f(x)$ *bien définie.*

(ii) $F \subset \operatorname{Ker} f$.

De plus, dans ce cas, l'application $\overline{f}$ *obtenue est linéaire.*

Démonstration. On souhaite appliquer la Propriété 5 et pour cela il suffit de montrer l'équivalence entre (ii) et la condition suivante :

$$\text{(ii)}' \qquad \forall x, x' \in E,\ x \sim_F x' \Rightarrow f(x) = f(x').$$

Montrons (ii)'⇒(ii) : soit $x \in F$. Alors $x \sim_F 0_E$. D'après (ii)', cela entraîne $f(x) = f(0_E)$, or f est linéaire donc $f(0_E) = 0_{E'}$. Donc $x \in \operatorname{Ker} f$. On a montré l'inclusion $F \subset \operatorname{Ker} f$, ce qui justifie (ii).

Montrons (ii)⇒(ii)' : Soient $x, x' \in E$ tels que $x \sim_F x'$. Alors $x - x' \in F$. Donc $x - x' \in \operatorname{Ker} f$ (d'après (ii)). Donc $f(x - x') = 0_{E'}$. Et comme f est linéaire cela entraîne $f(x) = f(x')$. On a vérifié que (ii)' est vraie.

Pour compléter la démonstration, il reste à montrer que, dans le cas où f "passe au quotient", l'application $\overline{f}$ est linéaire. Pour tous $\overline{x}, \overline{x'} \in E/F$, tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\overline{f}(\lambda \cdot \overline{x} + \overline{x'}) = \overline{f}(\overline{\lambda x + x'}) = f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x') = \lambda \overline{f}(\overline{x}) + \overline{f}(\overline{x'})$$

en utilisant la définition des opérations sur l'espace quotient E/F, la définition de $\overline{f}$ et la linéarité de f. □

Exemple 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (0, y - x)$. Cette application est linéaire. On considère (comme précédemment) $F = \operatorname{Vect}((1,1))$. On a $f((1,1)) = (0,0)$ donc $(1,1) \in \operatorname{Ker} f$, d'où $F \subset \operatorname{Ker} f$ (on a en fait l'égalité). Cela entraîne que l'application f passe au quotient en $\overline{f} : E/F \to \mathbb{R}^2$.

On a vu que E/F s'interprète comme l'ensemble des droites du plan parallèles à F. L'application $\overline{f}$ s'interprète comme l'application qui à une telle droite associe son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

On considère une application linéaire $f : E \to E'$ et on souhaite "transformer" cette application (a priori quelconque) en une application bijective.

Pour rendre l'application injective, on va remplacer l'espace de départ par l'espace quotient $E/\operatorname{Ker} f$. Pour rendre l'application surjective, on va remplacer l'espace d'arrivée par $\operatorname{Im} f$.

Théorème 1. *Toute application linéaire* $f : E \to E'$ *passe au quotient par son noyau* $F = \operatorname{Ker} f$*, en une application* $\overline{f} : E/\operatorname{Ker} f \to E'$, $\overline{x} \mapsto f(x)$ *qui est linéaire et injective.*

De plus, $\operatorname{Im} \overline{f} = \operatorname{Im} f$*, et on obtient l'application*

$$\overline{f} : E/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f,\ \overline{x} \mapsto f(x)$$

qui est linéaire et bijective.

Démonstration. Par la propriété 6, l'application $\overline{f} : E/\operatorname{Ker} f \to E'$ est bien définie (car de manière évidente, on a $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f$) et linéaire.

Pour montrer que $\overline{f}$ est injective : soit $\overline{x} \in \operatorname{Ker} \overline{f}$. Alors $\overline{f}(\overline{x}) = 0_{E'}$. Par définition on a $f(x) = \overline{f}(\overline{x})$. Donc $x \in \operatorname{Ker} f$. Donc $x \sim_{\operatorname{Ker} f} 0_E$, ce qui entraîne $\overline{x} = \overline{0_E}$. On a montré : $\operatorname{Ker} \overline{f} = \{\overline{0_E}\}$. Donc $\overline{f}$ est injective.

Tout élément de $\operatorname{Im} \overline{f}$ s'écrit sous la forme $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$, donc appartient à $\operatorname{Im} f$. Inversement, tout élément de $\operatorname{Im} f$ est de la forme $f(x) = \overline{f}(\overline{x})$, donc appartient à $\operatorname{Im} \overline{f}$. Ainsi $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \overline{f}$. Le fait que l'application $\overline{f} : E/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$ est bijective est une conséquence de cette égalité. □

Corollaire 2. *Lorsque E est de dimension finie, on obtient l'égalité :*

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim E/\operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f.$$

C'est le théorème du rang.

Exemple 8. 1) Dans la situation de l'Exemple 7, l'application $f : E \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (0, y - x)$ (de noyau $F = \operatorname{Vect}((1, 1))$) passe au quotient en un isomorphisme $\overline{f} : E/F \to \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((0, 1))$ (qui à une droite parallèle à F associe son point d'intersection avec l'axe des ordonnées). La bijectivité s'interprète ainsi : pour tout point $p$de l'axe des ordonnées, il existe une unique droite parallèle à F passant par ce point.

2) Soit $\phi : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$. Ici $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ note l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'application ϕ est linéaire, surjective, de noyau $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$. Donc ϕ passe au quotient en un isomorphisme $\phi : \mathcal{F}(\mathbb{R})/F \to \mathbb{R}$. Cela entraîne : F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ de codimension 1.