

Algèbre linéaire 2

Examen janvier 2017.

Exercice I

① $E : \dim_{\mathbb{R}} E = 4$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$
 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

② $M_q \quad \chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^3(1-\lambda)$

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -8 & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -12 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{C_2+2C_1}{\stackrel{C_4+2C_3}{=}} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 4-2\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 1-\lambda & 4-2\lambda \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{L_1-2L_2}{\stackrel{L_3-2L_4}{=}} \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 (\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2-\lambda)^2 (2-\lambda)(1-\lambda) \end{aligned}$$

③ $Sp(A) \quad Sp(A) = \{1, 2\}$, $m(1) = 1$, $m(2) = 3$.

④ $\ker(f - 2\text{Id}_E)$

$$\begin{aligned} a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4 &\in \ker(f - 2\text{Id}_E) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 8b - c + 2d = 0 \\ a - 2b = 0 \\ 6a - 12b - c + 2d = 0 \\ c - 2d = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = 2d \end{cases} \end{aligned}$$

Une base est (v_1, v_2) avec $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\dim E_2(f) = 2 < m(2) = 3$ donc f n'est pas diagonalisable.

⑤ $\dim \ker(f - 2\text{Id}_E)^2$ et μ_f .

Comme $\dim \ker(f - 2\text{Id}_E) < m(2)$, on a

$$\dim \ker(f - 2\text{Id}_E) < \dim \ker(f - 2\text{Id}_E)^2 \leq m(2)$$

$$2 < \dim \ker(f - 2\text{Id}_E)^2 \leq 3$$

Donc $\dim \ker(f - 2\text{Id}_E)^2 = 3$

⑥ La deuxième ligne de $(A - 2I_4)^4$ est $(2 \ -4 \ -1 \ 2)$.
 les autres lignes sont proportionnelles car $\text{rg}(A - 2I_4)^2 = 1$.

$$\begin{aligned} a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4 &\in \ker(f - 2\text{Id}_E)^2 \text{ssi } (A - 2I_4)^2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \\ &\text{ssi } 2a - 4b - c + 2d = 0. \end{aligned}$$

⑦ On peut donc prendre $v_3 = (1, 0, 0, -1)$

⑧ $M_q \quad (f - 2\text{Id}_E)(v_3) \in \ker(f - 2\text{Id}_E)$

En effet, $v_3 \in \ker(f - 2\text{Id}_E)^2$, donc

$$(f - 2\text{Id}_E)(v_3) \in \ker(f - 2\text{Id}_E).$$

$$\begin{aligned} (f - 2\text{Id}_E)(1, 0, 0, -1) &= (4, 1, 6, 0) - (2, 0, 2, -2) = (2, 1, 4, 2) \\ &= v_1 + 2v_2 \end{aligned}$$

⑧ $\dim \ker (f - \text{Id}_E)$

λ est valeur propre, donc $\dim \ker (f - \text{Id}_E) \geq 1$

La multiplicité est 1, donc $\dim \ker (f - \text{Id}_E) \leq 1$

$\leadsto \dim \ker (f - \text{Id}_E) = 1$

⑨ $v_4 = e_1 + e_2 + 3e_3 + 3e_4$. Mg $v_4 \in \ker (f - \text{Id}_E)$

$f(v_4) = e_1 + e_2 + 3e_3 + 3e_4$ donc $v_4 \in \ker (f - \text{Id}_E)$.

⑩ Mg $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ base de E .

On a : $E = C_2(f) \oplus C_1(f)$

$= C_2(f) \oplus E_1(f)$

Or (v_1, v_2, v_3) base de $C_2(f)$ et (v_4) base de $E_1(f)$.

Donc (v_1, v_2, v_3, v_4) base de E .

⑪ $P : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑫ $f = d + v$ indice de v ?

$d|_{C_2(f)} = 2\text{Id}$ et $d|_{E_1(f)} = \text{Id}$

donc $v|_{C_2(f)} = f - 2\text{Id}$, d'ordre 2

$v|_{E_1(f)} = f - \text{Id}$, d'ordre 1

Donc v est d'indice de nilpotence 2.

⑬ $S = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(d)$ et $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$

$S = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ $T = B - S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

⑭ Calculer B^m

$B = S + T$; $B^m = (S + T)^m = S^m + m S^{m-1} T$

$B^m = \begin{pmatrix} 2^m & & & 0 \\ & 2^m & & \\ 0 & & 2^m & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 2^{m-1} & & & \\ & 2^{m-1} & & \\ & & 2^{m-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^m & & & 0 \\ & 2^m & & \\ 0 & & 2^m & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2^m & 0 & m2^{m-1} & 0 \\ 0 & 2^m & m2^m & 0 \\ 0 & 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑮ $A = P B P^{-1}$, $A^m = P B^m P^{-1}$

①

$$(1) \begin{cases} x_{n+2} = 6x_{n+1} - 8x_n - y_{n+1} + 2y_n \\ y_{n+2} = 6x_{n+1} - 12x_n + y_{n+1} + 2y_n \end{cases}$$

$$z_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \\ y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$z_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \\ y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot z_n$$

$$z_n = A^n z_0$$

② Expression pour x_n, y_n

$$\text{Soit } y_n = P^{-1} z_n : \quad z_n = A^n z_0 = P B^n P^{-1} z_0$$

$$\text{Donc } P^{-1} z_n = B^n \cdot y_0$$

$$= B^n \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a 2^n + c n 2^{n-1} \\ b 2^n + c n 2^n \\ c 2^n \\ d \end{pmatrix}$$

$$z_n = P \begin{pmatrix} a 2^n + c n 2^{n-1} \\ b 2^n + c n 2^n \\ c 2^n \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a 2^{n+1} + c(n+1) 2^n + d \\ a 2^n + c n 2^{n-1} + d \\ b 2^{n+1} + c n 2^{n+1} + 3d \\ b 2^n + c(n-1) 2^n + 3d \end{pmatrix}$$

$$d' \text{ on } \begin{cases} x_n = a 2^n + c n 2^{n-1} + d \\ y_n = b 2^n + c(n-1) 2^n + 3d \end{cases}$$

$$\text{verif } x_{n+2} = 4a 2^n + (n+2)c 2^{n+1} + d$$

$$\begin{aligned} & 6x_{n+1} - 8x_n - y_{n+1} + 2y_n \\ &= 12a 2^n + 12c(n+1) 2^{n-1} + 6d \\ & \quad - 8a 2^n - 8c n 2^{n-1} - 8d \\ & \quad - 4c n 2^{n-1} - 3d - 2b 2^n \\ & \quad + 4c(n-1) 2^{n-1} + 6d + 2b 2^n \\ &= 4a 2^n + c(4n+8) 2^{n-1} + d \quad \checkmark \end{aligned}$$

Exercice II E un $\mathbb{R}$ -ev, $u: E \rightarrow E$ tq $u^3 = u$

① m.q. u diago

$$u^3 = u \text{ donc } u^3 - u = 0, \text{ } u \text{ annule } X^3 - X = X(X^2 - 1) \\ = X(X+1)(X-1)$$

u annule un polynôme scindé à racines simples,
donc u diago.

② Si $u(x) = \lambda x$ alors $u^3(x) = \lambda^3 x$ donc $(u^3 - u)(x) = (\lambda^3 - \lambda) \cdot x$
donc $\lambda^3 - \lambda = 0$ (si $x \neq 0$)
 $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$

③ Les polynômes minimaux possibles de u sont les
diviseurs de $(X-1)X(X+1)$, soit les polynômes
 $(X-1)^{\varepsilon_1} X^{\varepsilon_0} (X+1)^{\varepsilon_{-1}}$ avec $\varepsilon_1, \varepsilon_0, \varepsilon_{-1} \in \{0, 1\}$
et non tous nuls.

④ Si u admet au plus deux valeurs propres, alors u annule
 $X(X-1)$ ou $X(X+1)$ ou $(X-1)(X+1)$
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $u^2 = u,$ $u^2 = -u,$ $u^2 = \text{Id}:$
 u projecteur $-u$ projecteur u symétrie

⑤ Soit $F = E_1(u) \oplus E_{-1}(u)$: $(u|_F)^2 = \text{Id}_F$ donc $u|_F$ est
une symétrie.

Exercice III

$$f: E \rightarrow E$$

$$\lambda \in \text{Sp}(f)$$

$$\alpha = m(\lambda), \quad \beta \text{ indice de } f - \lambda \text{Id}_E$$

$$F_k = \ker (f - \lambda \text{Id}_E)^k$$

$$\textcircled{1} \quad F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_\beta = F_{\beta+1} = F_{\beta+2} = \dots$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Mq } f(F_k) \subset F_k$$

$$\text{Soit } x \in F_k : (f - \lambda \text{Id})^k(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } (f - \lambda \text{Id})^k(f(x)) &= (f - \lambda \text{Id})^k \circ f(x) \\ &= f \circ (f - \lambda \text{Id})^k(x) \\ &\quad \text{car } f \text{ et } f - \lambda \text{Id commutent} \\ &= f(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x) \in \ker (f - \lambda \text{Id})^k = F_k.$$

$$\text{Soit } e_\beta \in F_\beta \setminus F_{\beta-1} \text{ et } e_k = (f - \lambda \text{Id})^{\beta-k}(e_\beta)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Mq } e_k \in F_k \setminus F_{k-1} \text{ et } \mathcal{A} = (e_1, \dots, e_\beta) \text{ est libre.}$$

$$\begin{aligned} (f - \lambda \text{Id})^k(e_k) &= (f - \lambda \text{Id})^k((f - \lambda \text{Id})^{\beta-k}(e_\beta)) \\ &= (f - \lambda \text{Id})^\beta(e_\beta) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ tq } \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_\beta e_\beta = 0$$

$$\text{Alors } (f - \lambda \text{Id})^{\beta-1}(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_\beta e_\beta) = 0$$

$$\text{Donc } \lambda_\beta (f - \lambda \text{Id})^{\beta-1}(e_\beta) = 0$$

$$\text{Or } (f - \lambda \text{Id})^{\beta-1}(e_\beta) \neq 0 \text{ car } e_\beta \notin F_{\beta-1}$$

$$\text{Donc } \lambda_\beta = 0 \text{ et } \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{\beta-1} e_{\beta-1} = 0$$

$$(f - \lambda \text{Id})^{\beta-2}(\quad) = 0 \leadsto \lambda_{\beta-1} = 0$$

$$\dots \text{ par récurrence : } \forall i, \lambda_i = 0.$$

On suppose que $\deg(\mu_f) = \deg(\chi_f)$

④ Mq $\mathcal{A}$ est une base de $C_\lambda(f)$

On a $\mu_f \mid \chi_f$ et $\deg(\mu_f) = \deg(\chi_f)$ donc $\mu_f = \chi_f$.
Donc $\alpha = \beta$.

$$\dim C_\lambda(f) = m(\lambda) = \alpha = \beta.$$

Comme $|\mathcal{A}| = \beta$ et que $\mathcal{A}$ est libre, $\mathcal{A}$ est une base de $C_\lambda(f)$.

⑤ Mq $\dim F_k = k$

$$\sum_{k=1}^{\beta} \dim F_k - \dim F_{k-1} = \dim F_\beta - \dim F_0 = \dim F_\beta = \beta$$

$$\text{Car } \dim F_k - \dim F_{k-1} > 0$$

$$\text{Donc } \dim F_k - \dim F_{k-1} = 1$$

$$\dim F_{\beta-1} = \dim F_\beta - 1 = \beta - 1$$

$$\dim F_{\beta-2} = \dim F_{\beta-1} - 1 = \beta - 2$$

$$\dots \dim F_k = k.$$

⑥ $g_\lambda : C_\lambda(f) \rightarrow C_\lambda(f)$
 $\alpha \mapsto f(\alpha)$

calculer $J_{\lambda, \beta} = \text{Mat}_{\mathcal{A}}(g_\lambda)$

$$g_\lambda = \lambda \text{Id} : e_k \mapsto e_{k-1}$$

$$\text{Donc } \text{Mat}_{\mathcal{A}}(g_\lambda - \lambda \text{Id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } J_{\lambda, \beta} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

⑦ Mq si $\chi_A = \chi_B$ scindé et $\deg(\mu_A) = \deg(\mu_B) = n$
alors A et B sont semblables.

$$\exists P : P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1, \beta_1}} & & \\ & \boxed{} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{J_{\lambda_n, \beta_n}} \end{pmatrix}$$

$$\exists Q : Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1, \beta_1}} & & \\ & \boxed{} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{J_{\lambda_n, \beta_n}} \end{pmatrix}$$

Mêmes racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ car $\chi_A = \chi_B$

Mêmes β_i car $\beta_i = \alpha_i$ car $\chi_A = \mu_A$, $\chi_B = \mu_B$.

$$\text{Donc } P^{-1} B P = Q^{-1} A Q, \text{ donc } (Q P^{-1}) B (P Q^{-1}) = A.$$

⑧ N, N' nilpotentes d'indice n dans $M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow N, N'$ semblables.

$$\text{Dans ce cas, on a } \mu_N(X) = \mu_{N'}(X) = X^n$$

$$\text{Donc } \chi_N(X) = \chi_{N'}(X) = X^n$$

Donc N, N' semblables.