Algèbre 2

Examen du 17/01/2017

Calculatrices et documents non autorisés. Durée 3h

Exercice 1. Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre 180.

Exercice 2. On considère le groupe $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

(a) Le groupe $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ est-il cyclique? Quel est son ordre?

(b) Combien le groupe $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ admet-il de sous-groupes d'ordre 2 et de sous-groupes d'ordre 6? Ces sous-groupes sont-ils cycliques?

(c) Déterminer ces sous-groupes et leurs générateurs.

(d) Montrer que dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, les racines du polynôme $P = X^4 + X^2 + \bar{1}$ sont toutes des carrés. Déterminer une factorisation de P dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{A}_n$ le groupe alterné, c-à-d. le sous-groupe du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ formé des permutations paires.

(a) Montrer que $\mathcal{A}_3$ est un groupe cyclique et déterminer ses générateurs.

(b) En déduire que si $f : \mathcal{S}_3 \to \mathcal{A}_3$ est un morphisme de groupes, alors $\forall \gamma \in \mathcal{S}_3$, $f(\gamma) = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}_3}$.

(c) Soit G un groupe d'ordre $2n$ et H un sous-groupe de G d'ordre n (donc d'indice 2). Montrer que

$$\forall g \in G, \quad g^2 \in H.$$

(d) En déduire que $\mathcal{A}_4$ (qui est d'ordre 12) n'a pas de sous-groupes d'ordre 6.

Exercice 4. On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + ib\sqrt{5};\ \ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

(b) On pose pour tout $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\theta(z) = z\bar{z} = |z|^2$. On note $(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])^*$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])^* = \{z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}];\ \theta(z) = 1\}$, déterminer alors $(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])^*$.

(c) Montrer que 2, 3, 31, $1 + i\sqrt{5}$ et $1 - i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(d) Montrer que $1 + i\sqrt{5}$ n'est associé ni à 2 ni à 3 dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(e) En déduire que l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ n'est pas factoriel.

Exercice 5. (a) Déterminer l'ensemble de solutions de l'équation $x^4 + \bar{2} = \bar{0}$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que le polynôme $X^4 + \bar{2} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

(c) On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 15X^3 + 7$. Montrer qu'il est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 1 (**2pt**), Exercice 2 (**6pt**), Exercice 3 (**4pt**), Exercice 4 (**6pt**), Exercice 5 (**4pt**).
Un corrigé de l'examen sera disponible à partir de 13h sur
`http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Khalid.Koufany/Algebre2/`