Algèbre 2, L3
Examen du 15/01/2024 à 9h
Documents/calculatrices interdits
Durée : 3h

Exercice 1. Définir les notions d' anneau intègre, factoriel, euclidien, principal, Noethérien, et donner les relations d'implication entre ces propriétés.

Exercice 2. On considère la permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{10}$ définie par

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 8 & 7 & 2 & 5 & 10 & 3 & 1 & 9 \end{smallmatrix}\right).$$

1. Décomposer σ en produit de cycles disjoints.
2. Calculer l'ordre de σ dans $\mathfrak{S}_{10}$.
3. Calculer σ^{4781}.
4. Calculer la signature de σ.

Exercice 3. On considère le groupe $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$ des inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.

1. Montrer que tout élément non nul de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ est inversible. Quel est l'ordre de $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$?
2. On rappelle que $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. Rappeler le théorème qui décrit tous les sous-groupes d'un groupe cyclique.
3. Montrer que $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$ a exactement un sous-groupe d'ordre 8 et donner les deux descriptions vues en cours de ce sous-groupe.
4. Soit $\overline{x} \in \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ non nul. Montrer que $\overline{x}$ est un carré si et seulement si $\overline{x}^8 = \overline{1}$.
5. Soit $\overline{x}$ une racine de $P(X) = X^6 + X^4 + X^2 + \overline{1}$ dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. Montrer que $\overline{x}^8 = \overline{1}$ puis que $\overline{x}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.
6. Déterminer les racines de P et écrire P comme produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 4. Donner la liste de tous les groupes abéliens d'ordre 240 écrits selon leur décomposition cyclique.

Exercice 5. Soit p un nombre premier ($p \geq 2$) et $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}] \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des nombres de la forme $a + bi\sqrt{p}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{C}, +, \times)$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ est intègre.
3. Pour $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$, on note $\overline{z}$ le conjugué complexe de z. Montrer que si $\overline{x} \,|\, \overline{y}$ dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$, alors $x | y$ dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$.
4. On note $N(z) = z\overline{z}$. Déterminer $N(a + bi\sqrt{p})$ en fonction de a et b.
5. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
6. Soit $x \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$. Montrer que x est inversible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$ si et seulement si $N(x) = 1$.
7. En déduire que $\mathbb{Z}[i\sqrt{p}]^\times = \{-1, 1\}$.
8. Soit $x \in \mathbb{Z}[i\sqrt{p}]$. Montrer que si $N(x)$ est un nombre premier, alors x est irréductible.
9. On suppose dans cette question que $p = 7$.
   (a) Montrer que si x n'est pas inversible, et non nul, alors $N(x) \geq 4$.
   (b) Montrer que $1 + i\sqrt{7}, 1 - i\sqrt{7}$ et 2 sont irréductibles (on pourra calculer $N(1 + i\sqrt{7}), N(1 - i\sqrt{7})$ et $N(2)$ et utiliser la question précédente).
   (c) En écrivant 8 comme produits d'éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$, montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$ n'est pas factoriel.
10. On suppose dans cette question que $p = 2$. On rappelle qu'on a vu en cours que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est euclidien. **Cette question est plus difficile que les précédentes.**
    (a) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est factoriel.
    (b) Soit $z \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ non inversible. Montrer qu'il existe un entier $\ell \geq 1$ et des éléments $x_i \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ irréductibles et tels que :

- $z = x_1 \cdots x_\ell$;
- $\forall i \geq 2,\ \mathrm{Re}(x_i) \geq 0$;
- Si $i \leq j$ alors $N(x_i) \leq N(x_j)$;
- Si $i \leq j$ et $N(x_i) = N(x_j)$ alors $|\mathrm{Re}(x_i)| < |\mathrm{Re}(x_j)|$.

Montrer de plus que l'entier ℓ et les éléments x_i sont uniques.

(c) Soit $x \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $N(x)$ est un nombre premier. Montrer que x est premier dans l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

(d) Soit $x \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $N(x)$ est un nombre premier et $y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $N(x)|N(y)$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $x|y$ ou que $\overline{x} \mid y$ dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

(e) Soit p un entier premier, et soit $x, y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tels que $N(x) = N(y) = p$. Montrer que $x = \pm y$ ou que $x = \pm \overline{y}$.

(f) Donner l'unique décomposition de l'élément $7 - 17i\sqrt{2}$ en produit de facteurs irréductibles dont il est question dans la question (b).