Algèbre linéaire 2
Examen du 15/01/2019

L2 mathématiques, épreuve d'algèbre linéaire 2
Le 15/01/2019 de 13h30 à 16h30 (durée 3h)

Sujet rédigé par P.E. Chaput
documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A puis calculer A^n en fonction de n.
2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :
$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$
pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0, w_0 et n.

Solution : On calcule le polynôme caractéristique de A. On trouve
$$P_A(X) = (X+1)(X-2)(X-5).$$
$A \in M_3(\mathbb{R})$ a trois valeurs propres, $-1, 2, 5$: A est donc diagonalisable. On cherche les sous-espaces propres associés. Pour -1, on a, pour $X = (x, y, z)$,
$$AX = -X \iff \begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \\ 3x + 6y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$
Le vecteur $(2, -1, 0)$ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. On fait de même avec 2, et on trouve (par exemple) le vecteur propre $(1, -1, 1)$ et pour 5, et on trouve le vecteur propre $(0, 0, 1)$. Ainsi, en posant
$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
on a $PDP^{-1} = A$. Le calcul de P^{-1} donne
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PDP^{-1}$, ce qui entraîne par récurrence $A^n = PD^nP^{-1}$. D^n se calcule facilement en mettant les coefficients de la diagonale à la puissance n. En effectuant les deux produits de matrice, on trouve finalement :
$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2.5^n & 5^n \end{pmatrix}.$$

On a $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence, on a $X_n = A^n X_0$. Grâce au calcul de A^n effectué à la question précédente, on trouve

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_n & = & (2(-1)^n - 2^n)u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})v_0 \\ v_n & = & ((-1)^{n+1} + 2^n)u_0 + ((-1)^{n+1} + 2^{n+1})v_0 \\ w_n & = & (-2^n + 5^n)u_0 + (-2^{n+1} + 2.5^n)v_0 + 5^n w_0 \end{array}\right.$$

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des couples de fonctions $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant le système d'équations différentielles

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 3x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) \end{array}\right.$$

Solution : On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors l'équation $Y' = AY$ est équivalente à l'équation $Z' = DZ$ pour $Z = P^{-1}Y$. On a alors

$$Z = \begin{pmatrix} \lambda e^t \\ \mu e^{-t} \end{pmatrix},$$

donc

$$Y = PZ = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda e^t + \mu e^{-t} \\ \lambda e^t + \mu e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, et un endomorphisme $f : E \to E$. On suppose que f est nilpotent, soit qu'il existe m tel que $f^m = 0$, et que $\dim \ker f = 1$.

1. Enoncer la définition de l'indice d'un endomorphisme en général et dans le cas d'un endomorphisme nilpotent. On notera par la suite i l'indice de f et k un entier quelconque.
2. On suppose que $n = 2$. Donner un exemple d'endomorphisme f vérifiant ces conditions.
3. On suppose que $n = 3$. Donner un exemple d'endomorphisme f vérifiant ces conditions.
4. Supposons $k \geq i$. Quelle est la valeur de $\dim \ker f^k$?
5. On suppose dans les questions suivantes que $0 \leq k < i$. On pose $g = f_{|\ker f^{k+1}}$. Montrer que $\mathrm{Im}\ \ g \subset \ker f^k$.
6. En utilisant la question précédente montrer que $\dim \ker f^{k+1} \leq \dim \ker f^k + 1$. Puis justifier qu'on a en fait l'égalité $\dim \ker f^{k+1} = \dim \ker f^k + 1$.
7. Montrer que $i = n$.
8. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que les coefficients $a_{i,j}$ de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ vérifient
$$\left\{\begin{array}{l} a_{i,i+1} = 1 \\ a_{i,j} = 0 \text{ si } j \neq i+1 \end{array}\right.$$
(on pourra choisir comme n-ième vecteur de $\mathcal{B}$ un vecteur e_n tel que $f^{n-1}(e_n) \neq 0$).

En conclusion, cet exercice montre qu'un endomorphisme nilpotent dont le noyau est de dimension 1 est d'indice de nilpotence n.

Solution :

1. C'est le premier entier k tel que $\dim \ker f^k = \dim \ker f^{k+1}$. Dans le cas nilpotent, c'est le plus petit entier k tel que $f^k = 0$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. n.
5. Pour $y = g(x) = f(x)$ avec $x \in \ker f^{k+1}$, on a $f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) = 0$, donc $y = f(x) \in \ker f^k$.
6. Le théorème du rang donne $\dim \ker f^{k+1} = \dim \ker g + \dim \mathrm{Im}\ g \leq 1 + \dim \ker f^k$. Mais comme $k < i$, $\dim \ker f^k < \dim \ker f^{k+1}$.
7. Par récurrence sur k, on montre simultanément $\dim \ker f^k = k$ et $i \geq k$ lorsque $k \leq n$. Ceci montre que $f^n = 0$ et $i \geq n$, donc $i = n$.
8. On prend e_n tel que $f^{n-1}(e_n) \neq 0$ et on pose $e_i = f^{n-i}(e_n)$ pour $1 \leq i \leq n-1$. On observe que $f(e_i) = e_{i-1}$ pour $i > 1$ et $f(e_1) = 0$. On montre que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est libre. En effet, si $\sum \lambda_i e_i = 0$, on applique f^{n-1} et on obtient $\lambda_n e_1 = 0$, donc $\lambda_n = 0$. On applique alors f^{n-2} et on obient $\lambda_{n-1} = 0$, et ainsi de suite. La famille étant libre et de cardinal n, c'est une base de E. La matrice est bien de la forme voulue, car $f(e_i) = e_{i-1}$ pour $i > 1$ et $f(e_1) = 0$.

Exercice 4. Dans cet exercice, on montre que les éléments de la décomposition de Dunford-Jordan d'un endomorphisme f sont des polynômes en f. Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Calculer le produit $(1 - X)(1 + X + \cdots + X^{k-1})$ dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\nu : F \to F$ un endomorphisme tel que $\nu^k = 0$. On note I le morphisme identité de F ($I = Id_F$). Montrer que $I - \nu$ est inversible et qu'il existe un polynôme $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(I - \nu)^{-1} = S(\nu)$.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E = F \oplus G$ une décomposition de E. On note $p_F : E \to F$ la projection sur F parallèlement à G. Supposons qu'on a un endomorphisme $g : E \to E$ tel que
$$(*) \quad \begin{cases} \mathrm{Im}\ g \subset F \\ G \subset \ker g \\ (p_F - g)^k = 0 \end{cases}$$
On pose $\nu = p_F - g$ et $\mu = Id_E - g$
   a) Montrer que $p_F \circ \nu = \nu \circ p_F = \nu$ et que $\nu \circ \mu = \mu \circ \nu = \nu^2$.
   b) Montrer que $(p_F - \nu)(p_F + \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^{k-1}) = p_F$.
   c) Montrer que $(p_F - \nu)(Id_E + \mu + \mu^2 + \cdots + \mu^{k-1}) = p_F$.
   d) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(0) = 0$ et $Q(g) = p_F$.
4. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé. On note
$$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}.$$
Rappeler la définition de l'espace caractéristique C_{λ_i} associé à la valeur propre λ_i et la propriété de ces espaces vue en cours.
5. On choisit $i \in \{1, \ldots, r\}$ et on note $F = C_{\lambda_i}$ et $G = \bigoplus_{j \neq i} C_{\lambda_j}$.

a) Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $R(0) = 0$ et

$$\prod_{j \neq i} ((\lambda_i - \lambda_j) + X)^{\alpha_j} = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)^{\alpha_j} + R(X).$$

b) Soit $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $S(0) = 0$ et $\nu : F \to F$ tel que $\nu^k = 0$. Montrer que $S(\nu)^k = 0$.

c) Soit

$$P_i = \prod_{j \neq i} \frac{(X - \lambda_j)^{\alpha_j}}{(\lambda_i - \lambda_j)^{\alpha_j}}.$$

Montrer que $P_i(f)$ vérifie les conditions $(*)$ avec $k = \alpha_i$.

6. On note $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$ la famille de projecteurs associée à la décomposition $E = \bigoplus_i E_{\lambda_i}$. Déduire des questions précédantes qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P(f) = \sum_i \lambda_i p_i$.
7. Rappeler le théorème de décomposition de Dunford-Jordan.
8. Pour $f = d + \nu$ la décomposition de Dunford-Jordan de f, montrer qu'il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(0) = Q(0) = 0$, $P(f) = d$, et $Q(f) = \nu$.

Solution :

1. $(1 - X)(1 + X + \cdots + X^{k-1}) = 1 - X^k$.
2. En appliquant l'égalité ci-dessus à ν, on obtient $(I - \nu)(I + \nu + \cdots + \nu^{k-1}) = I - \nu^k$. Or, $\nu^k = 0$ par hypothèse. Donc, $(I - \nu)(I + \nu + \cdots + \nu^{k-1}) = I$. Ainsi, $I - \nu$ est inversible d'inverse $I + \nu + \cdots + \nu^{k-1}$.
3. Puisque ν préserve les sous-espaces F et G, ν commute avec p_F et p_G. Ainsi, $p_F \circ \nu = \nu \circ p_F$. Par ailleurs, pour tout y dans G, on a $\nu(y) = 0$. En particulier, pour $x \in E$, $p_G(x) \in G$, et donc $\nu(p_G(x)) = 0$. On a donc

$$\nu = \nu \circ Id_E = \nu \circ (p_F + p_G) = \nu \circ p_F + \nu \circ p_G = \nu \circ p_F.$$

On a $\mu = Id_E - g = p_F + p_G - g = \nu + p_G$, donc les égalités $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu = \nu^2$ découlent des résultats déjà démontrés.

On calcule alors comme dans la question précédante :

$$\begin{aligned} & (p_F - \nu)(p_F + \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^{k-1}) \\ = \; & p_F + p_F \circ \nu + \cdots + p_F \circ \nu^{k-1} - \nu \circ p_F - \nu^2 - \cdots - \nu^k \\ = \; & p_F + \nu + \cdots + \nu^{k-1} - \nu - \nu^2 - \cdots - \nu^k \\ = \; & p_F - \nu^k = p_F \end{aligned}$$

On a vu que $\mu = \nu + p_G$ et que $\nu \circ p_G = p_G \circ \nu = 0$. Donc, $\mu^l = \nu^l + p_G$ pour tout l. Par ailleurs, $p_F \circ p_G = \nu \circ p_G = 0$. Donc,

$$\begin{aligned} & (p_F - \nu)(p_F + \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^{k-1}) \\ = \; & (p_F - \nu)[(p_F + p_G) + (\nu + p_G) + \cdots + (\nu^{k-1} + p_G)] \\ = \; & (p_F - \nu)(Id_E + \mu + \cdots + \mu^{k-1}) \end{aligned}$$

Comme $p_F - \nu = g$, ceci donne

$$g(Id_E + (Id_E - g) + \cdots + (Id_E - g)^{k-1}) = p_F.$$

En posant $Q(X) = X(1 + (1 - X) + \cdots + (1 - X)^{k-1})$, on a bien $Q(g) = p_F$, et $Q(0) = 0$.

4. $C_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i Id_E)^{\alpha_i}$ et $E = \bigoplus_i C_{\lambda_i}$.
5. Il suffit de poser $R(X) = \prod_{j \neq i}((\lambda_i - \lambda_j) + X)^{\alpha_j} - \prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)^{\alpha_j}$ pour avoir la relation proposée et l'égalité $R(0) = 0$.

   Pour S tel que $S(X) = \sum_i s_i X^i$, on a $S(0) = s_0$. L'hypothèse donne $s_0 = 0$ et donc $S(X) = \sum_{i \geq 1} X^i$. Alors, $S(X)^k$ est une combinaison linéaire de monômes de degré au moins k, de sorte que $S(\nu)^k = 0$.

   Pour $x \in C_{\lambda_j}$, on a, par définition de C_{λ_j}, $(f - \lambda_j Id_E)^{\alpha_j}(x) = 0$. On a donc $G \subset \ker P_i(f)$. Par ailleurs, f préserve C_{λ_i}, donc $P_i(f)$ aussi, de sorte que pour $x \in F$ et $y \in G$, on a $P_i(f)(x + y) = P_i(f)(x) + P_i(f)(y) = P_i(f)(x) \in F$. Ainsi, Im $P_i(f) \subset F$. Finalement, on a $f_{|F} = \lambda_i Id_F + \nu$ avec $\nu = f_{|F} - \lambda_i Id_F$ tel que $\nu^{\alpha_j} = 0$. On en déduit que

$$\begin{array}{rcl} P_i(f)_{|F} & = & \prod_{j \neq i}(f - \lambda_j Id_F)^{\alpha_j} \\ & = & \prod_{j \neq i}((\lambda_i - \lambda_j) Id_F + \nu)^{\alpha_j} \\ & = & \prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)^{\alpha_j} Id_F + S(\nu) \end{array}$$

   où S est le polynôme de la question 5a. Par la question 5b, $S(\nu)^{\alpha_j} = 0$.
6. Comme $P_i(f)$ vérifie les conditions $(*)$, il existe d'après la question 3 un polynôme Q_i tel que $Q_i(P_i(f)) = p_i$, soit $Q_i \circ P_i(f) = p_i$. En posant $P = \sum_i \lambda_i Q_i \circ P_i$, on obtient donc $P(f) = \sum_i \lambda_i p_i$, et P vérifie $P(0) = 0$.
7. Le théorème de Dunford-Jordan énonce qu'il existe un unique couple (d, ν) tel que $f = d + \nu$, d est diagonalisable, ν est nilpotent, et $d \circ \nu = \nu \circ d$. De plus, on a $d = \sum_i \lambda_i p_i$.
8. D'après la relation $d = \sum \lambda_i p_i$, $d = P(f)$ pour P comme dans la question 6. Il en découle que $\nu = f - d = f - P(f)$, donc $\nu = Q(f)$ pour $Q(X) = X - P(X)$.