Algèbre linéaire L2
Examen du 17/01/2020, 9h
Rédigé par PE Chaput
Documents et calculatrices interdits

Le sujet est long afin de couvrir le programme, mais il n'est pas attendu que vous rédigiez une solution à toutes les questions. Privilégiez plutôt la précision des arguments sur les questions que vous choisissez de traiter.

EXERCICE 1 - Vecteurs propres et valeurs propres

1. Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre.
2. Donner la définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E.
3. Montrer que λ est une valeur propre si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique.
4. Montrer que si $\dim E = n$, alors f peut avoir au plus n valeurs propres.

Solution :

1. Un vecteur propre est un vecteur non nul x tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $f(x) = \lambda x$. Si un tel couple existe, λ est appelé une valeur propre.
2. Le polynôme caractéristique χ_f est défini par $\chi_f(x) = \det(f - xId)$.
3. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ donné, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$ si et seulement si $f - \lambda Id_E$ n'est pas injective, ce qui équivaut à $\chi_f(\lambda) = 0$.
4. Comme χ_f est de degré exactement n, il peut avoir au plus n racines.

EXERCICE 2 - Calcul de déterminant

Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Solution : notons D le déterminant que l'on cherche à calculer. En enlevant la première ligne à toutes les autres, on trouve que

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

On a une matrice triangulaire supérieure, et donc $D = -8$.

EXERCICE 3 - Déterminant tridiagonal

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.

3. Montrer qu'il existe des constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta_n = \lambda \cdot 2^n + \mu$.

4. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.

Solution : 1. $\Delta_1 = 3, \Delta_2 = 7$ et $\Delta_3 = 15$.

2. On développe suivant la première colonne. On trouve

$$\Delta_{n+2} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est Δ_{n+1}. Pour le second, on développe par rapport à la première ligne, et on retrouve alors Δ_n (on a barré 2 lignes et 2 colonnes). Ceci nous donne la formule voulue.

3. On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 = 3r - 2$. Ses racines sont $r = 1$ et $r = 2$. On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = \lambda 2^n + \mu 1^n.$$

4. On a vu que $\Delta_1 = 3$ et $\Delta_2 = 7$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu &= 3 \\ 4\lambda + \mu &= 7. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $\lambda = 2$ et $\mu = -1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 4 - Résultant

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constants. On note $n = \deg(P)$, $m = \deg(Q)$, et on note E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus $n + m - 1$.

1. Donner une base naturelle de E (on ne demande pas de justifier que c'est une base). On notera $\mathcal{B}$ cette base.

2. Montrer que P et Q ont un facteur commun si, et seulement si, il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, tels que $AP = BQ$ et $\deg(A) < \deg(Q)$, $\deg(B) < \deg(P)$.

3. Montrer que P et Q ont un facteur commun si et seulement si on a l'égalité
$$\det_{\mathcal{B}}(P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q) = 0\,.$$

4. Pour $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et $Q = b_0 + \dots + b_mX^m$, on note :
$$R(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & b_0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_0 & \dots & b_1 & b_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ a_n & \vdots & & b_m & & \\ 0 & a_n & & & & \\ \vdots & \vdots & a_n & \dots & \dots & b_m \end{vmatrix}$$

(c'est un déterminant de taille $n+m$, avec m colonnes avec les coefficients a_i et n colonnes avec les coefficients b_j). On l'appelle le résultant de P et Q. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $R(P,Q) \neq 0$.

Solution : 1. On peut prendre $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \cdots, X^{n+m-1})$.

2. Supposons que P et Q ont un facteur commun D. On factorise $P = DB$ et $Q = DA$, et on observe que A et B vérifient les conditions voulues. Réciproquement, si $P \wedge Q = 1$ et $AP = BQ$, alors $P|BQ$ et par le théorème de Gauss $P|B$. Ceci contredit les contraintes imposées à B, puisque B doit être de degré strictement inférieur à celui de P et doit être non nul.

3. On a :

$$\begin{aligned}
P \wedge Q \neq 1 \quad &\iff \quad \exists (A,B) \in \mathbb{C}[X]^2,\ A \neq 0,\ B \neq 0,\ AP = BQ,\ \deg(A) < m,\ \deg(B) < n \\
&\iff \quad \text{la famille } (P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q) \text{ est liée} \\
&\iff \quad \det_{\mathcal{B}}(P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q) = 0.
\end{aligned}$$

4. En exprimant $\det_{\mathcal{B}}(P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q)$, on voit qu'il est égal à $R(P,Q)$. Ceci montre l'équivalence.

Exercice 5 - Valeurs propres des matrices stochastiques

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont des réels positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

1. Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$. Etant donné un vecteur propre $Z = (z_i)$ associé à λ, on pourra introduire un entier $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|z_i| = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$.

2. Démontrer que 1 est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

Solution : 1. Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ soit une valeur propre de A et soit $Z = (z_i)$ un vecteur propre associé. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|z_i| = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$. La i-ème coordonnée de AZ est $\sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j$ et ceci doit être égal à λz_i. Prenant les valeurs absolues et utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_i| \leq |z_i|$$

où on a utilisé aussi que $a_{i,j} \geq 0$ et que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. On a donc obtenu $|\lambda||z_i| \leq |z_i|$. Comme $|z_i| \neq 0$ (sinon Z serait le vecteur nul), ceci entraîne encore que $|\lambda| \leq 1$.

2. Il suffit de choisir $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ pour remarquer que $AZ = Z$. Ainsi, Z est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

Exercice 6 - Diagonalisation par polynôme minimal

Soit U la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4.

2. En déduire que U est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

3. Diagonaliser U.

Solution : 1. On vérifie facilement que

$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc que $U^2 = 2U + 3I_4$.

2. Le polynôme $X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de U. Il est scindé, à racines simples (-1 et 3), et donc U est diagonalisable. On peut même aller un cran plus loin et affirmer que $X^2 - 2X - 3$ est le polynôme minimal de U, puisqu'aucun polynôme de degré un n'est polynôme annulateur de U qui n'est pas multiple de I_4. Ainsi, les valeurs propres de U sont -1 et 3.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On commence par résoudre $UX = -X$:

$$\begin{aligned} UX = -X \quad & \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y+z+t & = & -x \\ x+z+t & = & -y \\ x+y+t & = & -z \\ x+y+z & = & -t \end{array} \right. \\ & \iff \quad x+y+z+t = 0 \\ & \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y-z-t \\ y & = & y \\ z & = & z \\ t & = & t \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi, -1 est une valeur propre de multiplicité 3, et une base de l'espace propre associé est donnée par les vecteurs $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ et $(-1, 0, 0, 1)$. Pour déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 3, dont on sait désormais qu'il est de dimension 1, on peut résoudre $UX = 3X$. On peut aussi remarquer que la somme de chaque ligne de la matrice fait 3. Ainsi, le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est vecteur propre de U pour la valeur propre 3. Il constitue une base de l'espace propre associé à la valeur propre 3.

Exercice 7 - $f \circ g$ et $g \circ f$ diagonalisables ?

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On souhaite étudier si le fait que $f \circ g$ est diagonalisable entraîne que $g \circ f$ est diagonalisable. On fixe $\mathcal{B}$ une base de E et on désigne par A (resp. B) la matrice de f (resp. g) dans cette base.

1. Dans cette question, on suppose f et g inversibles.
   (a) En utilisant $\det(BAB - \lambda B)$, démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   (b) Soit λ une valeur propre de $f \circ g$, et soit E_λ (resp. F_λ) l'espace propre de $f \circ g$ (resp. de $g \circ f$) associé à λ. Démontrer les inclusions
   $$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \text{ et } f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$
   (c) Que peut-on en déduire sur les dimensions des espaces E_λ et F_λ?
   (d) Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.
2. Dans cette question, on suppose maintenant f et g quelconques.
   (a) Montrer que si $f \circ g$ a une valeur propre nulle, il en est de même de $g \circ f$.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que $AB - \alpha I$ est inversible. On note C son inverse. Vérifier que

$$(BA - \alpha I)(BCA - I) = \alpha I.$$

Que peut-on en déduire pour $\det(BA - \alpha I)$?

(c) Déduire de ce qui précède que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

(d) Donner un exemple simple de matrices A et B tel que AB est diagonalisable, et BA n'est pas diagonalisable.

Solution :

1a. On écrit d'une part que

$$BAB - \lambda B = B(AB - \lambda I)$$

et donc

$$\det(BAB - \lambda B) = \det(B)P_{AB}(\lambda).$$

En écrivant d'autre part que

$$BAB - \lambda I = (BA - \lambda I)B,$$

on obtient cette fois que

$$\det(BAB - \lambda B) = P_{BA}(\lambda)\det(B).$$

On peut simplifier par $\det(B)$ qui est non nul et on trouve que $P_{AB} = P_{BA}$. AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

1b. Soit $x \in E_\lambda$, c'est-à-dire que $f \circ g(x) = \lambda x$. On a

$$g \circ f\big(g(x)\big) = g\big(f \circ g(x)\big) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$

Ceci prouve que $g(x) \in F_\lambda$, et donc que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$. Par symétrie des rôles joués par f et g, on a aussi $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$.

1c. f et g étant des isomorphismes, ils conservent la dimension, et on a donc :

$$\dim(g(E_\lambda)) = \dim(E_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) = \dim(F_\lambda).$$

D'autre part, les inclusions démontrées à la question précédente prouvent que

$$\dim(g(E_\lambda)) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) \leq \dim(E_\lambda).$$

Si on met tout ensemble, on en déduit que

$$\dim(E_\lambda) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(F_\lambda) \leq \dim(E_\lambda).$$

Ainsi, les espaces propres E_λ et F_λ ont même dimension.

1d. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de $f \circ g$. Alors, puisque $f \circ g$ est diagonalisable, on a

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = n.$$

D'après le résultat de la question précédente, on a aussi

$$\dim(F_{\lambda_1}) + \dots + \dim(F_{\lambda_p}) = n.$$

Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de $g \circ f$ est (au moins) égale à n. C'est bien que $g \circ f$ est diagonalisable.

2a. Si 0 est valeur propre de $f \circ g$, alors $\det(AB) = 0$. Mais $\det(AB) = \det(BA) = 0$, et donc 0 est valeur propre de $g \circ f$.

2b. On utilise la relation $(AB - \alpha I)C = I$, impliquant $ABC = I + \alpha C$. Développant, on trouve :

$$\begin{aligned}(BA - \alpha I)(BCA - I) &= B(ABC)A - BA - \alpha BCA + \alpha I \\ &= BA + \alpha BCA - BA - \alpha BCA + \alpha I \\ &= \alpha I.\end{aligned}$$

On en déduit que $\det(BA - \alpha I)$ est non nul, puisque

$$\det(BA - \alpha I) \times \det(BCA - I) = \alpha^n \neq 0,$$

et donc que $BA - \alpha I$ est inversible.

2c. On raisonne par contraposée. Si α n'est pas une valeur propre de $f \circ g$, alors $AB - \alpha I$ est inversible, et par la question précédente, $BA - \alpha I$ est inversible, c'est-à-dire que α n'est pas une valeur propre de $g \circ f$. Par contraposée, toute valeur propre de $g \circ f$ est une valeur propre de $f \circ g$. Par symétrie du rôle joué par f et g, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

2d. On va travailler en dimension 2, avec des matrices non-inversibles. Prenons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BA est diagonalisable, tandis que AB ne l'est pas.

Exercice 8 - Système d'équations différentielles

Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + 4x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 5x_2(t), \end{cases}$$

où x_1 et x_2 sont des fonctions différentiables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Trouver l'unique solution telle que $x_1(0) = x_2(0) = 1$.

Solution :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les solutions générales sont $x_1(t) = 2\lambda e^t + \mu e^{3t}$, $x_2(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t}$. La solution particulière est pour $\lambda = 0$ et $\mu = 1$: $x_1(t) = x_2(t) = e^{3t}$.