

Algèbre linéaire 2 - exercices de cours

1 Déterminants

Exercice de cours 1.1 Combien y a-t-il d'éléments dans $\mathfrak{S}_3$? Donner la liste des éléments de $\mathfrak{S}_3$.

Remarque 1.1 $\mathfrak{S}_n$ muni de la loi de composition $\circ$ est un groupe. En effet $\circ$ est une loi interne. En effet si $(\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n^2$, alors $\sigma \circ \sigma' \in \mathfrak{S}_n$ car la composée de deux bijections est une bijection.

La loi $\circ$ est associative. En effet si $(\sigma, \sigma', \sigma'') \in \mathfrak{S}_n^3$, alors on a évidemment $(\sigma \circ \sigma') \circ \sigma'' = \sigma \circ (\sigma' \circ \sigma'')$.

L'application identité notée id ($id(k) = k$ pour tout $k \in F_n$) est une permutation de F_n et est l'élément neutre pour $\circ$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a $\sigma \circ Id = Id \circ \sigma = \sigma$.

Tout élément σ de $\mathfrak{S}_n$ admet un inverse qui n'est rien d'autre que la bijection réciproque σ^{-1} .

Définition 1.2 $\mathfrak{S}_n$ muni de la loi $\circ$ s'appelle le **groupe des permutations** ou **groupe symétrique**.

Définition 1.3 On suppose que $n \geq 2$. Pour tout $(i, j) \in F_n^2$ tel que $i < j$, on appelle **transposition** échangeant i et j et on note τ_{ij} la permutation de F_n définie par $\tau_{ij}(i) = j$, $\tau_{ij}(j) = i$ et $\tau_{ij}(k) = k$, pour tout $k \in F_n \setminus \{i, j\}$.

On écrira aussi $\tau_{ij} = (i, j)$.

Exemple 1.4 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est une transposition et on a $\tau = (1, 4)$.

Nous admettons maintenant le théorème suivant qui nous sera utile par la suite.

Théorème 1.5 Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est produit de transpositions.

1.1 Signature d'une permutation

Définition 1.6 Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On dit que le couple (i, j) **présente une inversion pour σ** (ou est une **inversion de σ**) si $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $\ell(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ .

Exemple 1.7 La permutation Id ne possédant aucune inversion, on a $\ell(Id) = 0$.

Exemple 1.8 Considérons $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les couples $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, sont des inversions de σ . En revanche $(3, 4)$ n'est pas une inversion. Donc $\ell(\sigma) = 5$.

Soit $\tau = (i, i+1)$ une transposition élémentaire et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Etudions $I(\sigma \circ \tau)$. Pour $k < l$, on a $(k, l) \in I(\sigma \circ \tau)$ ssi $\sigma(\tau(k)) > \sigma(\tau(l))$. Il y a deux cas de figure : si $(k, l) \neq (i, i+1)$ alors $\tau(k) < \tau(l)$. Alors $(k, l) \in I(\sigma \circ \tau)$ ssi $(\tau(k), \tau(l)) \in I(\sigma)$ ssi $(k, l) \in \tau(I(\sigma))$. Si $(k, l) = (i, i+1)$, alors $(k, l) \in I(\sigma \circ \tau)$ ssi $(i, i+1) \notin I(\sigma)$. On a donc montré le résultat suivant :

Exemple 1.9 Soit $\tau = (i, i+1)$ une transposition élémentaire et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

- Si $(i, i+1) \in I(\sigma)$ alors $I(\sigma \circ \tau) = \tau(I(\sigma)) \setminus \{(i+1, i)\}$. Dans ce cas $\ell(\sigma \circ \tau) = \ell(\sigma) - 1$.
- Si $(i, i+1) \notin I(\sigma)$ alors $I(\sigma \circ \tau) = \tau(I(\sigma)) \cup \{(i, i+1)\}$. Dans ce cas $\ell(\sigma \circ \tau) = \ell(\sigma) + 1$.

Exercice de cours 1.2 Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, on a $\ell(\sigma) \leq 6$. Existe-t-il une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ telle que $\ell(\sigma) = 6$? Les trouver toutes.

Exercice de cours 1.3 Soit σ la permutation de l'exemple ???. Vérifier le Théorème ?? pour σ en écrivant σ comme produit de cinq transpositions de la forme $(i, i+1)$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$.

On pourra utiliser le fait que pour toute permutation σ' , si $\sigma'(i) > \sigma'(i+1)$, alors $\ell(\sigma' \circ (i, i+1)) = \ell(\sigma') - 1$, et trouver ainsi des entiers i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 tels que $\ell(\sigma \circ (i_1, i_1+1)) = \ell(\sigma) - 1$, $\ell(\sigma \circ (i_1, i_1+1) \circ (i_2, i_2+1)) = \ell(\sigma \circ (i_1, i_1+1)) - 1$, et ainsi de suite. On observera alors que $\sigma \circ (i_1, i_1+1) \circ (i_2, i_2+1) \circ (i_3, i_3+1) \circ (i_4, i_4+1) \circ (i_5, i_5+1)$ est de longueur 0, donc est l'élément neutre.

Exercice de cours 1.4 Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que σ peut s'écrire comme produit de cinq transpositions de la forme $(i, i+1)$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$.

On pourra utiliser le fait que pour toute permutation σ' , si $\sigma'(i) > \sigma'(i+1)$, alors $\ell(\sigma' \circ (i, i+1)) = \ell(\sigma') - 1$, et trouver ainsi des entiers i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 tels que $\ell(\sigma \circ (i_1, i_1+1)) < \ell(\sigma)$, $\ell(\sigma \circ (i_1, i_1+1) \circ (i_2, i_2+1)) < \ell(\sigma \circ (i_1, i_1+1))$, et ainsi de suite. On observera alors que $\sigma \circ (i_1, i_1+1) \circ (i_2, i_2+1) \circ (i_3, i_3+1) \circ (i_4, i_4+1) \circ (i_5, i_5+1)$ est de longueur 0, donc est l'élément neutre.

Définition 1.10 On appelle **signature** de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$.

Remarque 1.11 $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

Définition 1.12 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit que σ est **paire** si $\varepsilon(\sigma) = 1$ et σ est **impaire** si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Théorème 1.13 Soient $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$. Alors :

1. $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.
2. $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.
3. $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

PREUVE:

1. Remarquons d'abord que :

$$\begin{array}{ccc} \Phi & : & F_n^2 \setminus \{(i, i) ; i \in F_n\} \longrightarrow F_n^2 \setminus \{(i, i) ; i \in F_n\} \\ & & (i, j) \longmapsto (\sigma(i), \sigma(j)) \end{array}$$

est une bijection. Donc :

$$\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = 1$$

Or

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} &= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \right) \left(\prod_{1 \leq j < i \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \right) \\ &= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Donc $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \pm 1$. Puisque pour tout $i < j$, $\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$ est positif s'il y

a inversion en (i, j) et négatif sinon, le signe de $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$ est $(-1)^{\ell(\sigma)}$. On en

déduit que $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = (-1)^{\ell(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$.

2. Montrons la deuxième assertion.

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma \circ \sigma') &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma \circ \sigma'(j) - \sigma \circ \sigma'(i)}{j - i} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma \circ \sigma'(j) - \sigma \circ \sigma'(i)}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} \\ &= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \right) \varepsilon(\sigma') \\ &= \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ \sigma'(i) < \sigma'(j)}} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \right) \varepsilon(\sigma') \end{aligned}$$

Maintenant, l'application

$$\begin{array}{ccc} \{(i, j) / \sigma'(i) < \sigma'(j)\} & \longrightarrow & \{(k, l) / k < l\} \\ (i, j) & \longmapsto & (\sigma'(i), \sigma'(j)) \end{array}$$

est une bijection. Donc

$$\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ \sigma'(i) < \sigma'(j)}} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} = \prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{\sigma(l) - \sigma(k)}{l - k} = \varepsilon(\sigma)$$

Ceci achève la preuve de l'assertion 2.

3. De 2. on déduit immédiatement que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(id) = \varepsilon(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}) = 1$. Donc $\varepsilon(\sigma)$ et $\varepsilon(\sigma^{-1})$ ont même signe et $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

□

Proposition 1.14 *Soit τ une transposition de $\mathfrak{S}_n$. Alors τ est impaire.*

PREUVE: Supposons que $\tau = (i, j)$ avec $i < j$. Nous allons compter le nombre d'inversions en tous les couples (k, l) , $k < l$. Si $k \neq i, j$ et $l \neq i, j$, on n'a pas d'inversion en (k, l) . Donc regardons les cas où l'un des deux entiers est i ou j .

Si $k < i$, il n'y a pas d'inversion en (k, i) et (k, j) . De même si $k > j$, il n'y a pas d'inversion en (i, k) et (j, k) . Par contre si $j - i \geq 2$ et $i < k < j$, il y a inversion en (i, k) et (k, j) , ce qui fait $2(j - i - 1)$ inversions pour tous les couples de cette forme. Enfin comme il y a inversion en (i, j) , on en déduit que $\ell(\tau) = 1 + 2(j - i - 1)$ si $j - i \geq 2$ et $\ell(\tau) = 1$ si $j - i = 1$. On obtient le résultat désiré puisque $\varepsilon(\tau) = (-1)^{\ell(\tau)}$.

□

Exercice de cours 1.5 *Montrer que la transposition $(2, 4)$, dans $\mathfrak{S}_5$, est de longueur 3, donc que cette transposition est bien impaire.*

2 Applications multilinéaires

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou des complexes.

2.1 Applications multilinéaires : définition

Définition 2.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit que l'application :*

$$\begin{aligned} f &: E^p = E \times \cdots \times E \longrightarrow F \\ &(x_1, \cdots, x_p) \longmapsto f(x_1, \cdots, x_p) \end{aligned}$$

*est une **application multilinéaire** ou **p-linéaire** si pour tout i compris entre 1 et p et pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p$ fixés, l'application :*

$$x \longmapsto f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_p)$$

*est une application linéaire de E dans F . Si de plus $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une **forme p-linéaire**.*

Autrement dit on a pour tous vecteurs x et y de E :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x + \mu y, x_{i+1}, \dots, x_p) = \\ \lambda f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p) + \mu f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Exercice de cours 2.1 Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$, et soit $p = 2$. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : E^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto (0, x_1 y_2 - y_1 x_2, 0) \end{aligned} \quad (1)$$

est bilinéaire, mais pas celle définie de façon similaire par le vecteur $(0, x_1 y_1 - x_2 y_2, 0)$.

Remarque 2.2 Notons $\mathcal{L}^p(E, F)$ l'ensemble des applications p -linéaires de E dans F . Étant donné $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{L}^p(E, F)$, on peut définir les deux opérations suivantes :

1. $(f + g)(x_1, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_p) + g(x_1, \dots, x_p)$.
2. $(\lambda f)(x_1, \dots, x_p) = \lambda f(x_1, \dots, x_p)$.

Alors il est facile de vérifier que $\mathcal{L}^p(E, F)$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

2.2 Applications multilinéaires alternées

Définition 2.3 Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $v : E^p = E \times \dots \times E \longrightarrow F$ une application multilinéaire. On dit que v est **alternée** si pour tout couple $(i, j) \in F_p^2$ tel que $i \neq j$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$:

$$x_i = x_j \text{ implique } v(x_1, \dots, x_p) = 0$$

Exercice de cours 2.2 Montrer que l'application f définie par (1) est alternée.

Proposition 2.4 Si $v : E^p = E \times \dots \times E \longrightarrow F$ est une application multilinéaire alternée, alors pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ tel que $i < j$, on a :

$$v(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

PREUVE: Comme v est multilinéaire et alternée on a :

$$\begin{aligned} 0 &= v(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_p) \\ &= v(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) + v(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \\ &\quad + v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) + v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_p) \\ &= v(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) + v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Exercice de cours 2.3 Montrer que le produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$ est une application bilinéaire alternée. On pourra utiliser la formule qui définit ce produit vectoriel, $(x_1, y_1, z_1) \wedge (x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$, ou la règle des trois doigts de Maxwell.

Remarque 2.5 L'ensemble $\Lambda^p(E, F)$ des applications multilinéaires alternées de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(E, F)$ pour les opérations définies dans la remarque ??.

Remarque 2.6 De la proposition ??, on déduit immédiatement que si τ est une transposition de $\mathfrak{S}_p$, $v(x_1, \dots, x_p) = \varepsilon(\tau)v(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)})$.

Cette remarque nous conduit à la proposition suivante :

Proposition 2.7 Soit $v : E^p = E \times \dots \times E \longrightarrow F$ une application multilinéaire alternée et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. Alors pour tout vecteur $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, on a :

$$v(x_1, \dots, x_p) = \varepsilon(\sigma)v(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})$$

PREUVE: La preuve résulte d'une application directe du théorème ??. En effet toute permutation s'écrivant comme un produit de transpositions, il existe des transpositions $\tau_1, \dots, \tau_k$ telles que $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$. De la remarque ci-dessus, il découle que :

$$\begin{aligned} v(x_1, \dots, x_p) &= \varepsilon(\tau_1)v(x_{\tau_1(1)}, \dots, x_{\tau_1(p)}) \\ &= \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)v(x_{\tau_1 \circ \tau_2(1)}, \dots, x_{\tau_1 \circ \tau_2(p)}) \\ &= \dots \\ &= \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2) \dots \varepsilon(\tau_k)v(x_{\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(p)}) \\ &= \varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2) \dots \varepsilon(\tau_k)v(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \end{aligned}$$

La deuxième égalité découle de la relation

$$v(y_1, \dots, y_p) = \varepsilon(\tau_2)v(y_{\tau_2(1)}, \dots, y_{\tau_2(p)})$$

appliquée à $y_1, \dots, y_p$ définis par $y_j = x_{\tau_1(j)}$.

et utilisant la propriété 2. du théorème 1.4, on déduit que $\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2) \dots \varepsilon(\tau_k) = \varepsilon(\tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k) = \varepsilon(\sigma)$, d'où le résultat recherché. $\square$

Proposition 2.8 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_n$ de E , on note $\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$

leurs coordonnées respectives dans la base $\mathcal{B}$. Définissons ω par :

$$\begin{aligned} \omega : E^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i), i}. \end{aligned}$$

Alors ω est l'unique forme n -linéaire alternée $E^n \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$.

2. $\forall v \in \Lambda^n(E, \mathbb{K})$ on a $v = v(e_1, \dots, e_n)\omega$.
3. $\dim(\Lambda^n(E, \mathbb{K})) = 1$.

Exercice de cours 2.4 Supposer que $n = 2$. Calculer $\omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice de cours 2.5 Supposer que $n = 3$. Montrer que $\omega\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = 0$.

PREUVE DE LA PROPOSITION : Montrons que ω est une n -forme linéaire alternée. Soit $x'_i \in E$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x'_{1i} \\ \vdots \\ x'_{ni} \end{pmatrix}$ dans $(e_1, \dots, e_n)$ et soient $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned} \omega(x_1, \dots, \lambda x_i + \lambda' x'_i, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots (\lambda x_{\sigma(i)i} + \lambda' x'_{\sigma(i)i}) \cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(i)i} \cdots x_{\sigma(n)n} \\ &\quad + \lambda' \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x'_{\sigma(i)i} \cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= \lambda \omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \lambda' \omega(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Donc ω est multilinéaire. Montrons maintenant que ω est alternée. Soit $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ tel que $i < j$. Supposons que $x_i = x_j$. Considérons $\tau = (i, j)$ la transposition qui échange i et j . Alors :

$$\begin{aligned} \omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) &= \omega(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)\tau(1)} \cdots x_{\sigma(n)\tau(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(\tau(1))\tau(\tau(1))} \cdots x_{\sigma(\tau(n))\tau(\tau(n))}. \end{aligned}$$

La dernière égalité provient de l'égalité

$$\prod_{j=1}^n x_{\sigma(j), \tau(j)} = \prod_{k=1}^n x_{\sigma(k), \tau(k)} = \prod_{j=1}^n x_{\sigma(\tau(j)), \tau(\tau(j))}.$$

Or $\tau \circ \tau = id$, donc :

$$\begin{aligned} \omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma \circ \tau(1)1} \cdots x_{\sigma \circ \tau(n)n} \\ &= - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma \circ \tau) x_{\sigma \circ \tau(1)1} \cdots x_{\sigma \circ \tau(n)n} \end{aligned}$$

car $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$ et $\varepsilon(\tau) = -1$. Comme $\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur lui-même, on déduit que :

$$\begin{aligned}\omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) &= - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} \\ &= -\omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Donc $2\omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$ et comme $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on déduit que

$$\omega(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0.$$

Donc ω est alternée.

D'autre part si les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ de la base canonique alors $x_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $x_{ii} = 1$. Donc $x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} \neq 0$ si et seulement si $\sigma(i) = i$ pour tout i compris entre 1 et n c'est-à-dire si et seulement si $\sigma = id$. Donc :

$$\omega(e_1, \dots, e_n) = x_{11} \cdots x_{nn} = 1$$

Soit maintenant v une forme n -linéaire alternée. Alors :

$$\begin{aligned}v(x_1, \dots, x_n) &= v\left(\sum_{i_1=1}^n x_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n x_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n x_{i_n n} e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n x_{i_1 1} x_{i_2 2} \cdots x_{i_n n} v(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})\end{aligned}$$

Comme v est multilinéaire alternée, dès que pour $k \neq l$ on a $i_k = i_l$, alors $v(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$. Donc on ne va considérer que les termes où tous les i_j sont différents. Cela revient à dire que l'application $j \mapsto i_j$ qui va de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même est une bijection donc une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$. Donc en réécrivant $i_j = \sigma(j)$, on a :

$$\begin{aligned}v(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} v(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} v(e_1, \dots, e_n)\end{aligned}$$

où dans cette dernière égalité on a appliqué la proposition ?? . Donc $v = v(e_1, \dots, e_n)\omega$.

En particulier, si v est une forme n -linéaire alternée telle que $v(e_1, \dots, e_n) = 1$, on obtient $v = \omega$, ce qui montre l'unicité de ω affirmée au premier point.

Enfin comme $v = v(e_1, \dots, e_n)\omega$, il est facile de voir que ω est l'unique n -forme alternée telle que $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$.

□

3 Définition du déterminant et premières propriétés

3.1 Déterminant d'une famille de n -vecteurs

Notation 3.1 D'après la proposition précédente si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, alors il existe une unique n -forme linéaire alternée ω telle que $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$. Notons $\det_{\mathcal{B}} = \omega$.

Définition 3.2 Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Alors pour toute famille de n vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ s'appelle le **déterminant de la famille** $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 3.3 De la proposition ?? on déduit immédiatement que :

$$\forall v \in \Lambda^n(E, \mathbb{K}), \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, v(u_1, \dots, u_n) = v(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

PREUVE: En effet, la fonction v est n -linéaire et alternée, donc elle est égale à $\lambda \cdot \det_{\mathcal{B}}$ pour un certain scalaire λ . En calculant sa valeur sur $(e_1, \dots, e_n)$, on voit que $\lambda = v(e_1, \dots, e_n)$. $\square$

Proposition 3.4 Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Alors la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$.

PREUVE: Supposons que $(u_1, \dots, u_n)$ est liée. Alors il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

Comme $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Donc :

$$u_i = - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} u_j = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \alpha_j u_j$$

et

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \alpha_j \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_n) = 0$$

Réciproquement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$. Supposons par l'absurde que $(u_1, \dots, u_n)$ est libre. Comme E est de dimension n , $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E . Donc, d'après la Remarque ?? appliquée à $v = \det_{\mathcal{B}}$:

$$\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$$

Ceci contredit le fait que $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = 1$ donc $(u_1, \dots, u_n)$ est liée. $\square$

Exercice de cours 3.1 Montrer que les calculs de déterminants effectués dans les deux exercices suivant la Proposition ?? sont en accord avec la Proposition ??.

3.2 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition et définition 3.5 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n , f un endomorphisme de E et $v : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une forme n -linéaire alternée non nulle. Soit $f^*(v)$ l'application de E^n dans $\mathbb{K}$ définie pour tous $x_1, \dots, x_n$ par :

$$f^*(v)(x_1, \dots, x_n) = v(f(x_1), \dots, f(x_n))$$

Alors $f^*(v)$ est une forme n -linéaire alternée et $f^*(v) = \lambda v$. De plus λ ne dépend pas du choix de v et s'appelle le **déterminant** de f . On note $\lambda = \det(f)$.

PREUVE: La preuve du fait que $f^*(v)$ est multilinéaire alternée est laissée au lecteur. La proposition ?? nous disant que l'espace des formes multilinéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1, il s'ensuit que v étant non nul est une base de cet espace et donc $f^*(v) = \lambda v$. Maintenant si v' est une autre forme n -linéaire alternée non nulle, alors $v' = \mu v$ et on en déduit facilement que $f^*(v') = \lambda v'$ ce qui prouve l'unicité de λ . $\square$

Exercice de cours 3.2 Soit $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire alternée définie par la formule $\omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ et soit $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par $f_1(x, y) = (2y, 3x)$, $f_2(x, y) = (x + 2y, y)$ et $f_3(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$. Calculer $f_1^* \omega$, $f_2^* \omega$ et $f_3^* \omega$.

Proposition 3.6 Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

PREUVE: D'après la définition de $\det(f)$ on a

$$\det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = f^*(\det_{\mathcal{B}})(e_1, \dots, e_n) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \det(f).$$

$\square$

Proposition 3.7 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$. Alors pour tout endomorphisme f de E et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

$$\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$$

PREUVE: Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E alors :

$$\begin{aligned} \det(\lambda f) &= \det_{\mathcal{B}}((\lambda f)(e_1), \dots, (\lambda f)(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda f(e_1), \dots, \lambda f(e_n)) \\ &= \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité provient du fait que $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire. On en déduit donc le résultat recherché. $\square$

Proposition 3.8 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$. Soient f et g deux endomorphismes de E . Alors :

$$\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$$

PREUVE: Soit v une forme n -linéaire alternée non nulle. Alors :

$$\begin{aligned} ((f \circ g)^*v)(x_1, \dots, x_n) &= v((f \circ g)(x_1), \dots, (f \circ g)(x_n)) \\ &= v(f(g(x_1)), \dots, f(g(x_n))) \\ &= \det(f)v(g(x_1), \dots, g(x_n)) \\ &= \det(f)\det(g)v(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure que $(f \circ g)^*(v) = \det(f)\det(g)v$. Mais d'autre part, on a aussi $(f \circ g)^*(v) = \det(f \circ g)v$, d'où le résultat. $\square$

Exercice de cours 3.3 Pour les fonctions f_1, f_2, f_3 de l'exercice précédent, calculer $f_1 \circ f_2$, et $\det(f_1 \circ f_2)$ de deux manières différentes.

Proposition 3.9 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

1. Alors $\det(\text{Id}_E) = 1$.
2. Un endomorphisme f de E est un automorphisme de E si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Si f est un automorphisme alors : $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

PREUVE: Étant donnée v une forme n -linéaire alternée non nulle on a de manière immédiate $\text{Id}_E^*v = v$, donc $\det(\text{Id}_E) = 1$ ce qui montre le point 1.

Supposons maintenant que f est un automorphisme. Alors d'après la proposition ?? on a :

$$\det(f \circ f^{-1}) = \det(f)\det(f^{-1}) = \det(\text{Id}_E) = 1$$

Ce qui montre que $\det(f) \neq 0$ ainsi que la relation demandée.

Réciproquement supposons que $\det(f) \neq 0$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Comme $\det(f) \neq 0$, d'après la proposition ?? $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de E , donc une base de E . Il s'ensuit que f est surjective et comme les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension, f est un automorphisme. $\square$

Proposition 3.10 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f dans $\mathcal{B}$. Alors

$$\det(f) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$$

PREUVE: D'après la proposition ?? $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. D'autre part la j -ième colonne de A n'étant rien d'autre que les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $f(e_j)$, on déduit du point 1. de la proposition ?? la relation souhaitée. $\square$

3.3 Déterminant d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On note $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Définition 3.11 On note $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire définie par : $f_A(X) = AX$. Le déterminant de A est alors défini par la formule

$$\det(A) = \det(f_A). \quad (2)$$

Remarque 3.12

— On a évidemment $\det(I_n) = 1$. En effet :

$$\det(I_n) = \det(\text{Id}_{\mathbb{K}^n}) = 1$$

— D'autre part, la Proposition ?? donne $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}$.

Comme corollaire de la Définition ?? et des propositions ??, ?? et ?? on a les théorèmes suivants :

Théorème 3.13 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Théorème 3.14 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Théorème 3.15 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si A est inversible alors : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Nous verrons dans la partie 4.2 que l'on peut retrouver ce résultat de manière différente.

Proposition 3.16 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$ muni d'une base $\mathcal{B}$ et soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs. Soit P la matrice de $(u_1, \dots, u_n)$ dans $\mathcal{B}$. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(P)$$

PREUVE: La matrice P est en effet la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'application linéaire f qui envoie les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sur les vecteurs $u_1, \dots, u_n$. Or, par définition, le déterminant d'une matrice est le déterminant de l'application linéaire qui lui est associée. Donc $\det(P) = \det(f)$. Le résultat découle donc de la Proposition ??, qui donne $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. $\square$

3.4 Déterminant des matrices carrées 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, alors $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2}$. Il n'y a que deux permutations

dans $\mathfrak{S}_2$, les permutations $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $\varepsilon(id) = 1$ et $\varepsilon(\tau) = -1$.

Donc :

Proposition 3.17 Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, alors

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

3.5 Matrices transposées

Définition 3.18 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. La transposée tA de A est la matrice dont les coefficients sont les $\tilde{a}_{ij}$, avec $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$.

Exercice de cours 3.4 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$. Montrer que $\det({}^tA) = \det(A)$.

Proposition 3.19 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det({}^tA) = \det(A)$.

PREUVE: Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on a ${}^tA = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$. Donc :

$$\begin{aligned} \det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \tilde{a}_{\sigma(1)1} \cdots \tilde{a}_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{aligned}$$

On peut permuter les facteurs $a_{1\sigma(1)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$. On a alors :

$$a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma'(1)\sigma(\sigma'(1))} \cdots a_{\sigma'(n)\sigma(\sigma'(n))}$$

pour tout $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$. C'est en particulier vrai si on prend $\sigma' = \sigma^{-1}$. On a donc :

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

mais $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, donc

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

Or l'application $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même. Donc finalement,

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det(A)$$

□

Remarque 3.20 Le fait que $\det({}^tA) = \det(A)$ a pour conséquence que toutes les propriétés du déterminant démontrées sur les colonnes restent vraies sur les lignes et vice versa.

3.6 Opérations sur les lignes et les colonnes

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On notera par la suite :

$$C_1(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, C_n(A) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

les colonnes de A et :

$$L_1(A), \dots, L_n(A)$$

les lignes de A .

Alors $\det(A) = \det_{\mathcal{C}}(C_1(A), \dots, C_n(A)) = \det({}^tA) = \det_{\mathcal{C}}({}^tL_1(A), \dots, {}^tL_n(A))$. Les deux propositions qui suivent sont des conséquences immédiates du fait que $\det_{\mathcal{C}}$ est multilinéaire alternée.

Proposition 3.21 *Si une colonne (ou une ligne) est combinaison linéaire d'autres colonnes (ou lignes) alors $\det(A) = 0$. En particulier, si deux colonnes (ou deux lignes) sont égales, alors $\det(A) = 0$.*

Exercice de cours 3.5 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice telle que $L_1(A) = L_2(A)$. Donner les détails de la preuve de l'égalité $\det(A) = 0$.*

Proposition 3.22 (Opérations sur les colonnes)

1. Si à la colonne $C_j(A)$ (ou à la ligne $L_i(A)$) on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes $\sum_{k \neq j} \lambda_k C_k(A)$ (ou des autres lignes $\sum_{k \neq i} \lambda_k L_k(A)$), le déterminant reste inchangé.
2. Si on permute deux colonnes (ou deux lignes) de A , le déterminant change de signe.
3. Si on multiplie une colonne (ou une ligne) de A par μ , alors le déterminant de A est multiplié par μ .

Exercice de cours 3.6 *Montrer le cas particulier suivant de la Proposition ci-dessus :*

$$\det_{\mathcal{C}}(C_1(A) + 2C_2(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = \det_{\mathcal{C}}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)).$$

Exercice de cours 3.7 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Montrer que*

$$\det_{\mathcal{C}}(C_1(A) + 2C_2(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = \det_{\mathcal{C}}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)).$$

Exercice de cours 3.8 *Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Vérifier le résultat obtenu à l'aide de la Proposition ??.*

Exercice de cours 3.9 *Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Retrouver ce résultat à l'aide des propriétés générales du déterminant.*

4 Développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne

4.1 Cofacteurs et comatrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A(i, j)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de A .

Exemple 4.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Alors :

$$A(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Définitions 4.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— On appelle **cofacteur** de $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ d'indice (i, j) le coefficient

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i, j))$$

— La matrice $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle la **matrice des cofacteurs** ou **comatrice**.

Exercice de cours 4.1 Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Montrer que $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & -6 \\ -8 & -6 & 6 \end{pmatrix}$.

Avant d'énoncer le théorème principal, nous avons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 4.3 Soit $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. Alors $\det(A) = \det(B)$.

PREUVE: Considérons les applications :

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} &\longmapsto \Phi(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V &: \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^{n-1} \longrightarrow \mathbb{K} \\ (X_1, \dots, X_{n-1}) &\longmapsto \det_{\mathcal{C}}(E_1, \Phi(X_1), \dots, \Phi(X_{n-1})) \end{aligned}$$

Alors Φ est une application linéaire et de manière immédiate, V est une forme $n - 1$ -linéaire alternée. Soit $\mathcal{C}' = (E'_1, \dots, E'_{n-1})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$. Alors

$$V(E'_1, \dots, E'_{n-1}) = \det_{\mathcal{C}}(E_1, \Phi(E'_1), \dots, \Phi(E'_{n-1})) = \det_{\mathcal{C}}(E_1, \dots, E_n) = 1$$

D'après la proposition ??, il existe une unique $n - 1$ -forme alternée sur $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $V(E'_1, \dots, E'_{n-1}) = 1$. Donc $V = \det_{\mathcal{C}'}$ et on a :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det_{\mathcal{C}'}(C_1(B), \dots, C_{n-1}(B)) \\ &= \det_{\mathcal{C}}[E_1, \Phi(C_1(A)), \dots, \Phi(C_{n-1}(A))] \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Lemme 4.4 Soit $C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & 0 & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & 1 & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & 0 & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$

Alors $\det(C) = (-1)^{i+j} \det(A(i, j))$.

PREUVE: Après avoir échangé la ligne i avec la ligne $i - 1$, puis la ligne $i - 1$ avec la ligne $i - 2$, et ainsi de suite jusqu'à la première ligne, et après avoir fait de même avec les colonnes, on obtient d'après les règles de la Proposition ?? :

$$\begin{aligned} \det(C) &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ 0 & a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & A(i, j) & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & A(i,j) & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det(A(i,j))$$

d'après le lemme précédent. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème fondamental sur le calcul des déterminants qui sert constamment.

Théorème 4.5 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Alors :

1. $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A(i,k)) = \sum_{i=1}^n a_{ik} \tilde{a}_{ik}$. On dit qu'on **développe suivant la colonne k** .
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A(k,j)) = \sum_{j=1}^n a_{kj} \tilde{a}_{kj}$. On dit qu'on **développe suivant la ligne k** .

Exemple 4.6 Calculons $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$. Nous allons développer ce déterminant suivant la deuxième colonne. Pour cela affectons chaque coefficients a_{ij} de la matrice, du signe $(-1)^{i+j}$. On a alors :

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3^+ & 3^- & 7^+ \\ 0^- & 2^+ & 2^- \\ -3^+ & -1^- & -4^+ \end{vmatrix} \\ = -3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

où $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ a été obtenue en supprimant la première ligne et la deuxième colonne, $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ en supprimant la deuxième ligne et la deuxième colonne et $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ la troisième ligne et la deuxième colonne.

$$D'où $\det(A) = -3 \cdot 6 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 6 = 6$.$$

PREUVE DU THÉORÈME ?? : Montrons le 1. du théorème. La k -ième colonne de A peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = a_{1k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_{nk} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme le déterminant est multilinéaire, on a immédiatement,

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ik} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & 0 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1k-1} & 0 & a_{i-1k+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik-1} & 1 & a_{ik+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1k-1} & 0 & a_{i+1k+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & 0 & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Et d'après le lemme ??, on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A(i, k)).$$

D'autre part, comme $\det({}^t A) = \det(A)$, on obtient immédiatement l'assertion 2.

□

Proposition 4.7 (Règle de Sarrus) On a :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

La preuve s'obtient en développant par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne.

Remarque 4.8 On obtient facilement le résultat en écrivant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

Attention ! La règle de Sarrus fonctionne uniquement pour les matrices (3, 3).

4.2 Matrices triangulaires

Définition 4.9 Une matrice $A = (a_{i,j})$ est dite triangulaire si elle est triangulaire inférieure (ie $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$) ou triangulaire supérieure (ie $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$).

Proposition 4.10 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice triangulaire. Alors $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.

PREUVE: On démontre le résultat par récurrence sur n pour les matrices triangulaires supérieures. La relation est vraie pour $n = 1$. Supposons maintenant qu'elle est vraie pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour un entier $n \geq 1$ et montrons qu'elle reste vraie pour les matrices de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. Soit A une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$. Alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

En développant suivant la dernière ligne on a :

$$\det(A) = a_{n+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Par hypothèse de récurrence le résultat étant vrai pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on obtient le résultat voulu.

D'autre part, comme pour toute matrice carrée A , $\det(A) = \det({}^tA)$, la proposition reste vraie pour les matrices triangulaires inférieures. $\square$

Exercice de cours 4.2 Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4.3 Matrices inverses et déterminant

Théorème 4.11 Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A {}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = \det(A)I_n$$

PREUVE: Posons $A = (a_{ij})$ et ${}^t\tilde{A} = (b_{jk})$. Alors $b_{jk} = \tilde{a}_{kj}$. Soit $C = A {}^t\tilde{A}$. Montrons que $C = \det(A)I_n$. Pour cela posons $C = (c_{ik})$.

Soit $D(i, k)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-11} & \dots & a_{k-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{k+11} & \dots & a_{k+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

D'après le 1. du théorème ??, on a

$$\begin{aligned} \det(D(i, k)) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{ij} \det(A(k, j)) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{kj} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = c_{i,k} \end{aligned}$$

Si $i = k$, alors $D(i, k) = A$, donc $c_{ii} = \det(A)$. Si $i \neq k$, les lignes k et i de $D(i, k)$ sont les mêmes. Donc $c_{i,k} = 0$. On en déduit donc que $C = \det(A)I_n$.

□

Exercice de cours 4.3 Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. Montrer par le calcul que

$$A {}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = \det(A)I_3.$$

On en déduit alors immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4.12 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ (résultat déjà énoncé dans le théorème ??). Si A est inversible, $A^{-1} = \frac{{}^t\tilde{A}}{\det(A)}$.

Exercice de cours 4.4 Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A)$. Montrer que A est inversible, et que son inverse a des coefficients entiers. Calculer A^{-1} par deux méthodes différentes.

5 Formules de Cramer

On rappelle que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(S) : AX = Y$ est le système de n équations à n inconnues associé, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (S) est un système de Cramer.
- (S) admet une solution et une seule.
- $\text{rg}(A) = n$.
- A est inversible.
- $\det(A) \neq 0$.

Si (S) est de Cramer, la solution est donnée par $X = A^{-1}Y = \frac{{}^t\tilde{A}Y}{\det(A)}$. Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a alors la proposition suivante :

Proposition 5.1 (Formules de Cramer) *Si (S) est de Cramer, alors :*

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & y_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & y_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

PREUVE: On développe le déterminant de la proposition par rapport à la i -ième colonne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & y_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & y_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n y_j (-1)^{i+j} \det(A(j, i)) \end{aligned}$$

Posons $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$. On a $X = A^{-1}Y = \frac{{}^t\tilde{A}Y}{\det(A)}$, donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

On obtient donc

$$\frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n y_j (-1)^{i+j} \det(A(j, i)) = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n y_j \tilde{a}_{ji} = x_i.$$

□

6 Rang d'une matrice

Définition 6.1 (Matrice extraite) Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$. Soit $r \leq p$ et $s \leq q$. On dit que $A' \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ est une **matrice extraite** de A si A' est de la forme $A' = (a_{i_k j_l})_{\substack{1 \leq k \leq r \\ 1 \leq l \leq s}}$ où $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq p$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq q$.

Exemple 6.2 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Alors la matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice extraite de A .

Rappel 6.3 Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le rang de A noté $\text{rg}(A)$ est le rang de la famille des vecteurs colonnes de A . On a $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$. Le rang de A est donc aussi le rang de la famille des vecteurs lignes de A .

Théorème 6.4 Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors A est de rang r si et seulement si :

1. Il existe une matrice carrée A' extraite de A de format (r, r) telle que $\det(A') \neq 0$.
2. Pour tout $s > r$, toute matrice carrée A'' de format (s, s) extraite de A vérifie $\det(A'') = 0$.

PREUVE:

1. Montrons tout d'abord que si A est une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de rang r , alors il existe une matrice carrée A' extraite de A de format (r, r) telle que $\det(A') \neq 0$:

Comme $\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1(A), \dots, C_q(A)) = r$, on peut extraire de $(C_1(A), \dots, C_q(A))$ une famille libre $(C_{j_1}(A), \dots, C_{j_r}(A))$ de r vecteurs ($j_1 < \dots < j_r$).

Notons A' la matrice de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ dont la ℓ -ième colonne est $C_{j_\ell}(A)$. Alors :

$$r = \text{rg}(A') = \text{rg}({}^t A') = \text{rg}(L_1(A'), \dots, L_p(A'))$$

Donc on peut extraire de la famille $(L_1(A'), \dots, L_p(A'))$ une famille libre de r vecteurs $(L_{i_1}(A'), \dots, L_{i_r}(A'))$ ($i_1 < \dots < i_r$). Soit A'' la matrice de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ dont la k -ième ligne est $L_{i_k}(A')$. En fait $A'' = (a_{i_k j_\ell})_{1 \leq k, \ell \leq r}$ et $\text{rg}(A'') = r$. Donc $\det(A'') \neq 0$.

2. Montrons maintenant que s'il existe une matrice carrée $A' \in \mathcal{M}_s(\mathbb{K})$ extraite de A telle que $\det(A') \neq 0$ alors $\text{rg}(A) \geq s$:

Tout d'abord $A' = (a_{i_k j_\ell})_{1 \leq k, \ell \leq s}$ avec $i_1 < \dots < i_s$ et $j_1 < \dots < j_s$.

Puisque $\det(A') \neq 0$ $\text{rg}(A') = s$ et $(C_1(A'), \dots, C_s(A'))$ est une famille libre. Mais cela implique que la famille $(C_{j_1}(A), \dots, C_{j_s}(A))$ est libre. Donc $\text{rg}(A) \geq s$.

Des points 1. et 2. on déduit de manière immédiate le théorème. □

Exemple 6.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Alors :