**Algèbre 2, L3**
**Partiel du 08/11/2022 à 9h**
**Documents/calculatrices interdits**
**Durée : 2h**

**Exercice 1.** On rappelle que $\mathbb{C}^*$ muni de la multiplication est un groupe. On note $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$ l'ensemble des éléments de norme complexe 1 et, pour $n$ un entier naturel, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des éléments $z$ tels que $z^n = 1$.

1. Montrer que $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$ sont des sous-groupes de $\mathbb{C}^*$.
2. Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe cyclique de générateur $a$. Rappeler la formule donnant l'ordre de $a^k$. Puis déterminer tous les éléments d'ordre 4 dans $\mathbb{U}_{20}$.
3. Lorsque $G_1, G_2$ sont deux groupes finis, montrer que l'élément $(a, b)$ du groupe $G_1 \times G_2$ est d'ordre $o(a, b) = \mathrm{ppcm}(o(a), o(b))$. Puis étendre ce résultat au cas d'un produit de la forme $G_1 \times \cdots \times G_n$ avec $n \geq 2$.
4. Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre $540 = 2^2 3^3 5$. On indiquera dans chaque cas la suite d'invariants.
5. Montrer que tout groupe abélien d'ordre 540 admet au moins un élément d'ordre 30.
6. Montrer qu'il existe un groupe abélien d'ordre 540 ne contenant aucun élément d'ordre 60.

**Exercice 2.** Dans cet exercice, on note

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que $G$, muni de la multiplication matricielle, est un groupe.
2. Montrer que $U$ est un sous-groupe distingué de $G$, qui de plus est abélien.
3. En déduire que l'ensemble quotient $G/U$ a une structure de groupe.
4. On note $\phi : G \to \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ l'application définie par

   $$\phi : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto (a, d).$$

   Montrer que $\phi$ est un morphisme de groupes surjectif.
   On rappelle que la structure de groupe sur $\mathbb{R}^*$ est donnée par la multiplication et que la structure de groupe sur un produit est donnée composante par composante : la structure de groupe sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ est donc donnée par $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$.
5. En déduire que le groupe quotient $G/U$ est isomorphe à $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et qu'il est abélien.
6. Le groupe $G$ est-il abélien ?

**Exercice 3.** Soit $G$ un groupe fini d'ordre $n$. Soit $p$ le plus petit nombre premier qui divise $n$. On suppose que $H$ est un sous-groupe de $G$ d'indice $p$. Le but de cet exercice est de montrer que $H$ est distingué.

1. Donner la définition d'un sous-groupe distingué, donner un exemple de sous-groupe distingué dans un groupe et donner un autre exemple de sous-groupe non distingué.
2. On rappelle que l'indice de $H$ dans $G$ est le cardinal de $G/H$. Rappeler les définitions de $G/H$ et $H\backslash G$ et expliquer pourquoi on a toujours $H \in G/H$ et $H \in H\backslash G$. Quel est le cardinal de $H\backslash G$ ?
3. On suppose d'abord que $p = 2$ : $H$ est donc un sous-groupe d'indice 2. Montrer que dans ce cas, $H$ est bien distingué. On pourra pour cela considérer les quotients $G/H$ et $H\backslash G$ et en déduire deux partitions de $G$.

Dans les questions suivantes, on ne fait plus l'hypothèse que $p = 2$.

4. Montrer que la formule $g \cdot xH = gxH$ définit une action de $G$ sur $G/H$.

5. En restreignant cette action à $H$, montrer qu'on obtient un morphisme de groupes $\varphi : H \to \mathfrak{S}(G/H)$, où $\mathfrak{S}(G/H)$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $G/H$.
6. Montrer que les éléments de $\varphi(H)$ préservent l'élément $H \in G/H$, et que donc on obtient plus précisément un morphisme $H \to \mathfrak{S}(E)$, où $E$ désigne l'ensemble $G/H$ privé de $H$.
7. Montrer que le cardinal de $\mathfrak{S}(E)$ est $(p-1)!$.
8. Montrer que le cardinal de $\varphi(H)$ divise $n$.
9. Déduire des deux questions précédentes et de l'hypothèse que le cardinal de $\varphi(H)$ est égal à 1.
10. Conclure que $H$ est distingué.