Algèbre 2, L3
Partiel du 06/11/2022 à 9h30
Documents/calculatrices interdits
Durée : 2h

L'évaluation prendra en compte la précision des arguments donnés dans les démonstrations. Le sujet est volontairement long ; il n'est pas attendu que les étudiants traitent toutes les questions.

Exercice 1. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Rappeler la notion d'orbite et de stabilisateur dans ce contexte. Soit $x, y \in E$, appartenant à la même orbite. Montrer que les stabilisateurs G_x et G_y de x et de y sont conjugués dans G, à savoir qu'il existe $g \in G$ tel que $G_y = g \cdot G_x \cdot g^{-1}$.

Exercice 2. Dans cet exercice, G désigne un groupe abélien. Pour $x \in G$, on note $o(x)$ l'ordre de x dans G. On note G_f l'ensemble des éléments de G qui sont d'ordre fini.

1. Soit $x \in G$. Rappeler le lien qu'il existe entre $o(x)$ et $\langle x \rangle$, le sous-groupe de G engendré par x.
2. Faire aussi le lien entre $o(x)$ et $\{k \in \mathbb{Z} \,|\, x^k = e\}$.
3. Soit $x, y \in G_f$. Montrer que $o(xy)$ est fini et que $o(xy) | ppcm(o(x), o(y))$.
4. On suppose dans cette question et la suivante que $o(x)$ et $o(y)$ sont premiers entre eux. Montrer qu'alors $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$
5. Montrer que sous l'hypothèse $pgcd(o(x), o(y)) = 1$, on a $o(xy) = o(x)o(y) = ppcm(o(x), o(y))$ (on pourra chercher à résoudre l'équation $(xy)^k$ en montrant qu'elle implique $x^k = y^k = e$).
6. Montrer que G_f forme un sous-groupe de G.
7. Que vaut $\mathbb{Z}_f$?

Solution :

1. $o(x) = |\langle x \rangle|$.
2. $\{k \in \mathbb{Z} \,|\, kx = 0\} = o(x)\,\mathbb{Z}$.
3. Soit $x, y \in G$ d'ordre fini. Soit k, l tels que $x^k = e$ et $y^l = e$. Soit $m = ppcm(k, l)$, et soit donc k', l' les entiers tels que $kk' = m$ et $ll' = m$. Comme G est abélien, $(xy)^m = x^{kk'}y^{ll'} = (x^k)^{k'}(y^l)^{l'} = ee = e$, donc xy est aussi d'ordre fini divisant m. Ainsi, l'ensemble des éléments d'ordre fini forme bien un sous-groupe.
4. Cela découle du théorème de Lagrange puisque $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ est un sous-groupe de $\langle x \rangle$ et de $\langle y \rangle$. Ainsi, le cardinal de $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ divise celui de $\langle x \rangle$ et de $\langle y \rangle$.
5. Si $(xy)^k = e$, alors $x^k = y^{-k}$ d'où on déduit que c'est un élément de $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$, donc l'élément neutre.
6. Soit $x, y \in G_f$. Alors $(x^{-1})^k = (x^k)^{-1} = e^{-1} = e$, de sorte que x^{-1} est d'ordre fini. De plus, on a vu que $xy \in G_f$. Ainsi, G_f est bien un sous-groupe.
7. Seul 0 est d'ordre fini dans $\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z}_f = \{0\}$.

Exercice 3. Soit p un nombre premier. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient G un groupe d'ordre p^n et $Z(\mathrm{G})$ son centre. Considérons un sous-groupe distingué H de G non réduit à l'élément neutre.

1. On considère l'action de G sur H par conjugaison, c'est-à-dire par $\forall g \in \mathrm{G}, \forall h \in \mathrm{H}$, $g \cdot h = ghg^{-1}$. Montrer que c'est bien une action.
2. Montrer que toute orbite est de cardinal une puissance de p.
3. Pour $h \in \mathrm{H}$, montrer que l'orbite de h est de cardinal 1 si et seulement si $h \in Z(\mathrm{G})$.
4. Montrer que $\mathrm{H} \cap Z(\mathrm{G}) \neq \{e\}$.
5. Montrer que l'ordre de $Z(\mathrm{G})$ est strictement supérieur à 1.
6. Montrer que H contient un élément h tel que $\forall g \in \mathrm{G}$, $gh = hg$ et $o(h) = p$.

Solution :

Soit p un nombre premier. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient G un groupe d'ordre p^n et $Z(\mathrm{G})$ son centre. Considérons un sous-groupe distingué H de G non trivial.

1. Tout d'abord, comme H est distingué, ghg^{-1} est bien un élément de H. Par ailleurs, comme dans le cours, on vérifie que pour $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$ et $h \in \mathrm{H}$, on a
$$g_1 \cdot (g_2 \cdot h) = g_1 \cdot (g_2 h g_2^{-1}) = g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1} = (g_1 g_2) \cdot h\,.$$
2. Soit $h \in \mathrm{H}$ et G_h le stabilisateur de h dans G. On a la bijection $\mathrm{G} \cdot h \simeq \mathrm{G}/\mathrm{G}_h$, qui montre que le cardinal de $\mathrm{G} \cdot h$ est un diviseur du cardinal de G. Comme celui-ci est p^n, il existe un entier m avec $m \leq n$ et tel que $|\mathrm{G} \cdot h| = p^m$.
3. Soit $h \in \mathrm{H}$. Si $h \in Z(\mathrm{G})$, alors pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $g \cdot h = h = ghg^{-1} = h$, puisque $gh = hg$. Ainsi, l'orbite de h est réduite au singleton $\{h\}$. Réciproquement, si $\mathrm{G} \cdot h = \{h\}$, alors pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $g \cdot h = h$, donc $gh = hg$, et ainsi $h \in Z(\mathrm{G})$.
4. Montrons que $\mathrm{H} \cap Z(\mathrm{G}) \neq \{e\}$. L'ordre de H est une puissance de p soit p^β car, d'après le théorème de Lagrange, $|\mathrm{H}|$ divise $|\mathrm{G}|$ qui est une puissance de p. L'ordre de H est aussi somme des cardinaux des orbites pour l'action de G par conjugaison sur H (les orbites forment une partition de G); chacune de ces orbites a pour cardinal une puissance de p (cf question précédente).

   Raisonnons par l'absurde: supposons que $Z(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H} = \{e\}$; alors une seule des orbites est réduite à un seul élément: l'orbite de e. Ainsi nous avons d'une part $|\mathrm{H}| = p^\beta$, d'autre part $|\mathrm{H}| = 1 +$ somme de puissances de p d'où
$$p^\beta = 1 + \text{ somme de puissances de } p$$
   contradiction. Par suite $Z(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H} \neq \{e\}$.
5. Comme $\mathrm{H} \cap Z(\mathrm{G}) \neq \{e\}$, $Z(\mathrm{G}) \neq \{e\}$, et donc le cardinal de $Z(\mathrm{G})$ est strictement supérieur à 1.
6. Il existe un entier m avec $0 < m \leq n$ tel que le cardinal de $Z(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H}$ soit p^m. En particulier, p divise le cardinal de $Z(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H}$. En appliquant le théorème de Cauchy dans ce groupe, il contient un élément h tel que $o(h) = p$. Cet élément convient.

Exercice 4. Décrire tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit $n \geq 3$ un entier. Considérons les matrices suivantes de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$
Notons G le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ engendré par σ et τ; désignons par H le sous-groupe de G engendré par σ et K le sous-groupe de G engendré par τ:
$$\mathrm{G} = \langle \sigma, \tau \rangle, \qquad \mathrm{H} = \langle \sigma \rangle, \qquad \mathrm{K} = \langle \tau \rangle.$$
Posons $\mathrm{K}' = \{g \in \mathrm{G} \,|\, \det g = 1\}$ et définissons les vecteurs v_0 et Y_0 de $\mathbb{R}^2$ par
$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'ordre de σ.
2. Donner une interprétation géométrique de τ et donner son ordre.
3. Si G est d'ordre fini, que peut-on dire sur son ordre ?
4. Montrer que $\sigma\tau = \tau^{n-1}\sigma$.
5. Donner tous les éléments de H et K. En utilisant la question précédente, montrer qu'on a $\mathrm{G} = \{\tau^i \sigma^j \,|\, 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq 1\}$ et que donc G est de cardinal $2n$.
6. Combien y a-t-il de classes à gauche de G modulo H ?
7. Décrire ${}^{\mathrm{G}}\!/\!{}_{\mathrm{H}}$.
8. A-t-on $\mathrm{H} \lhd \mathrm{G}$? Si oui décrire le groupe quotient ${}^{\mathrm{G}}\!/\!{}_{\mathrm{H}}$.
9. A-t-on $\mathrm{K} \lhd \mathrm{G}$? Si oui décrire le groupe quotient ${}^{\mathrm{G}}\!/\!{}_{\mathrm{K}}$. On pourra utiliser le fait que tout sous-groupe d'indice 2 est distingué (vu en exercice).
10. Le sous-ensemble K' de G est-il un sous-groupe de G ? Si oui, a-t-on $\mathrm{K}' \lhd \mathrm{G}$?
11. Comparer K et K'.
12. Existe-t-il un sous-groupe de G isomorphe à ${}^{\mathrm{G}}\!/\!{}_{\mathrm{K}}$?
13. Montrer que la multiplication des matrices définit une action
$$\mathrm{G} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (M, X) \mapsto M \cdot X = MX$$

14. L'action est-elle transitive ?
15. L'action est-elle fidèle ?
16. Quels sont les points fixes de l'action ?
17. Quel est le stabilisateur G_{v_0} du vecteur v_0 ?
18. Décrire l'orbite du vecteur v_0.
19. Quel est le stabilisateur G_S du segment $S = [v_0, Y_0]$?

Solution :

1. Nous avons $\sigma \neq \mathrm{id}$ mais $\sigma^2 = \mathrm{id}$ donc σ est d'ordre 2.
2. On voit que τ est la rotation de centre $O = (0,0)$ et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. En particulier τ est d'ordre n. On peut de plus déterminer τ^k:
$$\tau^k = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$
3. Si G est d'ordre fini, alors son ordre est divisible d'une part par 2 et d'autre part par n, donc par $\mathrm{ppcm}(2, n)$.
4. Montrons que $\sigma\tau = \tau^{n-1}\sigma$. Un calcul direct assure que $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{-1}$:
$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma\tau\sigma = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} = \tau^{-1}$$
On en déduit, puisque τ est d'ordre n, que $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^{n-1}$ puis que $\sigma\tau = \tau^{n-1}\sigma$.
5. Donnons tous les éléments de G, H et K.

   Puisque σ est d'ordre 2, nous avons
$$\mathrm{H} = \{\mathrm{id},\, \sigma\} \tag{1}$$
   Comme τ est d'ordre n, nous avons
$$\mathrm{K} = \{\mathrm{id},\, \tau,\, \tau^2,\, \dots,\, \tau^{n-1}\}. \tag{2}$$
   Par définition, G est le sous-groupe engendré par τ et σ. Montrons qu'il est égal à
$$\{\mathrm{id},\, \tau,\, \tau^2,\, \dots,\, \tau^{n-1},\, \sigma,\, \tau\sigma,\, \tau^2\sigma,\, \dots,\, \tau^{n-1}\sigma\} =: \mathrm{G}'$$
   en utilisant la méthode vue en cours et TD.

   D'une part, si L est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ contenant τ et σ, alors il contient les produits de ces deux éléments, donc il contient tous les éléments de la forme $\tau^i\sigma^j$, donc il contient G' : $\mathrm{L} \supset \mathrm{G}'$. Ceci montre que $\mathrm{G} \supset \mathrm{G}'$.

   Montrons maintenant que G' est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Soit donc deux éléments g, h de G', et soit i, j, k, l les entiers avec $0 \leq i, k \leq n-1$ et $0 \leq j, l \leq 1$ tels que $g = \tau^i\sigma^j$ et $h = \tau^k\sigma^l$. Montrons que le produit $gh = \tau^i\sigma^j\tau^k\sigma^l$ est encore dans G'. Si $j = 0$, alors $gh = \tau^{i+k}\sigma^l$, et il existe $i' \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $\tau^{i+k} = \sigma^{i'}$ (en effet $\tau^{i+k} \in \mathrm{K}$ et on utilise **??**), d'où $gh = \tau^{i'}\sigma^j \in \mathrm{G}'$.

   Si $j = 1$, alors la relation $\sigma\tau = \tau^{-1}\sigma$ vue à la question précédente implique par récurrence que $\sigma^j\tau^k = \tau\sigma^{-k}$, et on peut donc écrire que
$$gh = \tau^i\sigma\tau^k\sigma^l = \tau^{i-k}\sigma^{1+l} = \tau i'\sigma^{j'} \,,$$
   où i' et j' sont des entiers avec $0 \leq i' \leq n-1$ et $0 \leq j' \leq 1$ tels que $\tau^{i-k} = \tau^{i'}$ et $\sigma^{1+l} = \sigma^{j'}$, dont l'existence est garantie par (**??**) et (**??**).

   Nous avons donc montré que $gh \in \mathrm{G}'$, à savoir que G' est stable par produits. Montrons qu'il est aussi stable par passage à l'inverse : soit $g = \tau^i\sigma^j \in \mathrm{G}'$. Nous avons alors $g^{-1} = \sigma^{-j}\tau^{-i}$, et puisque $\sigma^{-j}, \tau^{-i} \in \mathrm{G}'$ (encore une fois par (**??**) et (**??**)), nous en déduisons d'après la stabilité par produits que $g^{-1} \in \mathrm{G}'$.

   Nous avons ainsi montré que G' est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, ce qui montre l'autre inclusion $\mathrm{G} \subset \mathrm{G}'$ et termine la question.
6. Déterminons le nombre de classes à gauche de G modulo H.

   L'ensemble des classes à gauche de G modulo H est l'ensemble ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}$. Son cardinal est $\left|{}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}\right| = [\mathrm{G} : \mathrm{H}] = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{H}|}$. D'après la question précédente nous avons $|\mathrm{G}| = 2n$, $|\mathrm{H}| = 2$ et donc $\left|{}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{H}}\right| = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{H}|} = n$.

7. Décrivons ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{H}}$.

   Les descriptions de G et H nous permettent d'affirmer que
$$ {}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{H}} = \{\overline{\mathrm{id}},\, \overline{\tau},\, \ldots,\, \overline{\tau^{n-1}}\}. $$
8. Le sous-groupe H de G n'est pas distingué dans G; en effet
$$ \tau^{-1}\sigma\tau = \tau^{-1}\tau^{n-1}\sigma = \tau^{n-2}\sigma \notin \mathrm{H} \text{ (car par hypothèse } n \geq 3 \text{ donc } n-2 \geq 1). $$
9. Nous avons $[\mathrm{G} : \mathrm{K}] = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{K}|} = \frac{2n}{2} = 2$. Ainsi K est un sous-groupe d'indice 2 de G; il est donc distingué dans G et ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{K}}$ a une structure de groupe.

   Le groupe quotient ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{K}}$ est d'ordre 2 donc isomorphe à ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2\mathbb{Z}}$. Nous avons ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{K}} = \{\overline{\mathrm{id}},\, \overline{\sigma}\}$.
10. L'application $\det\colon \mathrm{G} \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes et K' est son noyau. Ainsi K' est un sous-groupe distingué de G.
11. Comparons K et K'.

   Remarquons que $\det\tau^{\ell} = \cos^2\left(\frac{2\pi\ell}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi\ell}{n}\right) = 1$ donc τ^{ℓ} appartient à K'. Ainsi $\mathrm{K} = \langle\tau\rangle \subset \mathrm{K}'$.

   Soit $g \in \mathrm{G} \smallsetminus \mathrm{K}$, alors g s'écrit $\tau^{\ell}\sigma$ avec $0 \leq \ell \leq n-1$ (cf 5.) d'où $\det g = \det(\tau^{\ell}\sigma) = \det(\tau^{\ell})\det\sigma = 1 \times (-1) = -1$. Par suite g n'appartient pas à K'. Nous venons de montrer que si g n'appartient pas à K, alors g n'appartient pas à K', autrement dit que si g appartient à K', alors g appartient à K, *i.e.* $\mathrm{K}' \subset \mathrm{K}$.

   Finalement, $\mathrm{K} = \mathrm{K}'$.
12. Les groupes H et ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{K}}$ sont d'ordre 2, donc sont isomorphes. Il en résulte qu'il existe un sous-groupe de G (le sous-groupe H) isomorphe à ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\mathrm{K}}$.
13. Montrons que la multiplication des matrices définit une action
$$ \mathrm{G} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad\qquad (M, X) \mapsto M \cdot X = MX $$
   D'une part $\mathrm{id} \cdot X = X$; d'autre part pour M, M' dans G nous avons
$$ (MM') \cdot X = MM'X = M \cdot (M' \cdot X) $$
   par l'associativité du produit matriciel. Nous avons donc bien une action de G sur $\mathbb{R}^2$.
14. Commençons par rappeler:

   > Soit G un groupe opérant sur un ensemble X. On dit que G opère transitivement sur X si
   > $$ \forall x \in X, \quad \forall y \in X, \quad \exists g \in \mathrm{G}, \quad g \cdot x = y $$

   L'action n'est pas transitive. En effet, d'une part l'orbite d'un vecteur $X \in \mathbb{R}^2$ est l'ensemble
$$ \mathcal{O}_X = \{g \cdot X \,|\, g \in \mathrm{G}\} = \{gX \,|\, g \in \mathrm{G}\}; $$
   d'autre part $|\mathrm{G}| = 2n$. En particulier, $\mathcal{O}_X$ compte au plus $2n$ éléments alors que $\mathbb{R}^2$ est infini: aucune orbite ne peut être égale à $\mathbb{R}^2$ tout entier.
15. Commençons par rappeler:

   > Soit G un groupe opérant sur un ensemble X. On dit que G opère fidèlement si $\varphi\colon \mathrm{G} \to \mathfrak{S}(X)$ est injectif, c'est-à-dire si $g \cdot x = x$ pour tout $x \in X$ implique $g = 1$.
   > Remparque: ${}^{\mathrm{G}}\!/\!_{\ker\varphi}$ opère fidèlement sur X.

   L'action est fidèle: soit $g \in \mathrm{G}$ tel que $g \cdot X = X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, *i.e.* tel que $gX = X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, alors $g = \mathrm{Id}$.
16. Déterminons les points fixes de l'action, *i.e.* déterminons
$$ \{X \in \mathbb{R}^2 \,|\, g \cdot X = X \quad \forall g \in \mathrm{G}\}. $$
   Autrement dit nous cherchons les $X \in \mathbb{R}^2$ tels que $g \cdot X = X$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Remarquons que $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un point fixe. Montrons que c'est le seul. En effet si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un point fixe, alors en particulier $\sigma \cdot X = X$, c'est-à-dire $(x, -y) = (x, y)$ d'où $y = 0$. De plus nous

avons $\tau \cdot X = X$ soit $\tau \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ qui se réécrit $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) x \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. En particulier $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) x = 0$; mais pour $n \geq 3$, nous avons $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \neq 0$ donc $x = 0$ et $X = (0,0)$. Finalement $(0,0)$ est l'unique point fixe de l'action.

17. Déterminons le stabilisateur

$$\mathrm{G}_{v_0} = \{g \in \mathrm{G} \,|\, g \cdot v_0 = v_0\} = \{g \in \mathrm{G} \,|\, gv_0 = v_0\}$$

du vecteur $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons que $\sigma \cdot v_0 = \sigma v_0 = v_0$, *i.e.* σ appartient à G_{v_0}.

Par ailleurs, soit $1 \leq k \leq n-1$, alors $\tau^k \cdot v_0 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$; ainsi $\tau^k \cdot v_0 = v_0$ si et seulement si $\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 1$ et $\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\frac{2k\pi}{n} \equiv 0 \pmod{2\pi}$, *i.e.* si et seulement si k est un multiple de n: contradiction avec $1 \leq k \leq n-1$. Ainsi aucun τ^k, $1 \leq k \leq n-1$, ne fixe v_0.

De même nous avons $\tau^k\sigma \cdot v_0 = v_0$ si et seulement si $\tau^k \cdot v_0 = v_0$ si et seulement si $\tau^k = \mathrm{id}$; ainsi aucun $\tau^k\sigma$, $1 \leq k \leq n-1$, fixe v_0.

Il en résulte que $\mathrm{G}_{v_0} = \{\mathrm{id}, \sigma\} = \mathrm{H}$.

18. Décrivons l'orbite du vecteur v_0.

Puisque $\mathcal{O}_{v_0}$ et ${}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{G}_{v_0}}$ sont en bijection nous avons

$$|\mathcal{O}_{v_0}| = \left|{}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{G}_{v_0}}\right|.$$

Or

$$\left|{}^{\mathrm{G}}\!/_{\mathrm{G}_{v_0}}\right| = [\mathrm{G} : \mathrm{G}_{v_0}] = [\mathrm{G} : \mathrm{H}] = \frac{|\mathrm{G}|}{|\mathrm{H}|} = \frac{2n}{2} = n.$$

Ainsi l'orbite du vecteur v_0 compte n éléments.

Les éléments $\tau^k \cdot v_0 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$, $0 \leq k \leq n-1$, sont 2 à 2 distincts. Ils forment donc l'orbite de v_0.

19. Quel est le stabilisateur G_S du segment $S = [v_0, Y_0]$?

Comme $Y_0 = -v_0$ nous voyons que

$$\sigma \cdot Y_0 = \sigma \cdot (-v_0) = \sigma(-v_0) = -\sigma(v_0) = -v_0 = Y_0$$

donc $\sigma[v_0, Y_0] = [v_0, Y_0]$ et σ appartient à G_S.

Si g appartient à G_S, alors comme g est linéaire, g doit envoyer v_0 sur un élément de la droite $\langle v_0 \rangle = (v_0, Y_0)$. Cherchons de tels $g \in \mathrm{G}$. On a ou bien $g = \tau^k$, ou bien $g = \tau^k\sigma$ avec dans les deux cas $0 \leq k \leq n-1$. Dans les deux éventualités

$$g \cdot v_0 = \tau^k v_0 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \end{pmatrix}.$$

Mais $\langle v_0 \rangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0\}$ donc on souhaite que $\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \equiv 0 \pmod{\pi}$ c'est-à-dire $\frac{2k\pi}{n} \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Si n est impair, alors la seule possibilité est $k = 0$ et $\mathrm{G}_S = \{\mathrm{id}, \sigma\} = \mathrm{H}$.

Si $n = 2m$ est pair, alors nous avons deux possibilités: $k = 0$ et $k = m$. Pour $k = m$ nous avons

$$\tau^m = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2m\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2m\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

Ainsi $\tau^m \cdot v_0 = Y_0$ et $\tau^m \cdot Y_0 = v_0$. Par suite $\tau^m \cdot S = S$. Finalement $\mathrm{G}_S = \{\mathrm{id}, \sigma, \tau^m, \tau^m\sigma\}$.