Algèbre 2, L3
Partiel du 06/11/2022 à 9h30
Documents/calculatrices interdits
Durée : 2h

L'évaluation prendra en compte la précision des arguments donnés dans les démonstrations. Le sujet est volontairement long ; il n'est pas attendu que les étudiants traitent toutes les questions.

Exercice 1. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Rappeler la notion d'orbite et de stabilisateur dans ce contexte. Soit $x, y \in E$, appartenant à la même orbite. Montrer que les stabilisateurs G_x et G_y de x et de y sont conjugués dans G, à savoir qu'il existe $g \in G$ tel que $G_y = g \cdot G_x \cdot g^{-1}$.

Exercice 2. Dans cet exercice, G désigne un groupe abélien. Pour $x \in G$, on note $o(x)$ l'ordre de x dans G. On note G_f l'ensemble des éléments de G qui sont d'ordre fini.

1. Soit $x \in G$. Rappeler le lien qu'il existe entre $o(x)$ et $\langle x \rangle$, le sous-groupe de G engendré par x.
2. Faire aussi le lien entre $o(x)$ et $\{k \in \mathbb{Z} \,|\, x^k = e\}$.
3. Soit $x, y \in G_f$. Montrer que $o(xy)$ est fini et que $o(xy) | ppcm(o(x), o(y))$.
4. On suppose dans cette question et la suivante que $o(x)$ et $o(y)$ sont premiers entre eux. Montrer qu'alors $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$
5. Montrer que sous l'hypothèse $pgcd(o(x), o(y)) = 1$, on a $o(xy) = o(x)o(y) = ppcm(o(x), o(y))$ (on pourra chercher à résoudre l'équation $(xy)^k$ en montrant qu'elle implique $x^k = y^k = e$).
6. Montrer que G_f forme un sous-groupe de G.
7. Que vaut $\mathbb{Z}_f$?

Exercice 3. Soit p un nombre premier. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient G un groupe d'ordre p^n et $Z(\mathrm{G})$ son centre. Considérons un sous-groupe distingué H de G non réduit à l'élément neutre.

1. On considère l'action de G sur H par conjugaison, c'est-à-dire par $\forall g \in \mathrm{G}, \forall h \in \mathrm{H}$, $g \cdot h = ghg^{-1}$. Montrer que c'est bien une action.
2. Montrer que toute orbite est de cardinal une puissance de p.
3. Pour $h \in \mathrm{H}$, montrer que l'orbite de h est de cardinal 1 si et seulement si $h \in Z(\mathrm{G})$.
4. Montrer que $\mathrm{H} \cap Z(\mathrm{G}) \neq \{e\}$.
5. Montrer que l'ordre de $Z(\mathrm{G})$ est strictement supérieur à 1.
6. Montrer que H contient un élément h tel que $\forall g \in \mathrm{G}$, $gh = hg$ et $o(h) = p$.

Exercice 4. Décrire tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit $n \geq 3$ un entier. Considérons les matrices suivantes de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

Notons G le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ engendré par σ et τ; désignons par H le sous-groupe de G engendré par σ et K le sous-groupe de G engendré par τ:

$$\mathrm{G} = \langle \sigma, \tau \rangle, \qquad \mathrm{H} = \langle \sigma \rangle, \qquad \mathrm{K} = \langle \tau \rangle.$$

Posons $\mathrm{K}' = \{g \in \mathrm{G} \,|\, \det g = 1\}$ et définissons les vecteurs v_0 et Y_0 de $\mathbb{R}^2$ par

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'ordre de σ.
2. Donner une interprétation géométrique de τ et donner son ordre.
3. Si G est d'ordre fini, que peut-on dire sur son ordre ?
4. Montrer que $\sigma\tau = \tau^{n-1}\sigma$.

5. Donner tous les éléments de H et K. En utilisant la question précédente, montrer qu'on a $\mathrm{G} = \{\tau^i\sigma^j \mid 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq 1\}$ et que donc G est de cardinal $2n$.
6. Combien y a-t-il de classes à gauche de G modulo H ?
7. Décrire G/H.
8. A-t-on $\mathrm{H} \lhd \mathrm{G}$? Si oui décrire le groupe quotient G/H.
9. A-t-on $\mathrm{K} \lhd \mathrm{G}$? Si oui décrire le groupe quotient G/K. On pourra utiliser le fait que tout sous-groupe d'indice 2 est distingué (vu en exercice).
10. Le sous-ensemble K' de G est-il un sous-groupe de G ? Si oui, a-t-on $\mathrm{K}' \lhd \mathrm{G}$?
11. Comparer K et K'.
12. Existe-t-il un sous-groupe de G isomorphe à G/K ?
13. Montrer que la multiplication des matrices définit une action

$$\mathrm{G} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (M, X) \mapsto M \cdot X = MX$$

14. L'action est-elle transitive ?
15. L'action est-elle fidèle ?
16. Quels sont les points fixes de l'action ?
17. Quel est le stabilisateur G_{v_0} du vecteur v_0 ?
18. Décrire l'orbite du vecteur v_0.
19. Quel est le stabilisateur G_S du segment $S = [v_0, Y_0]$?