Résumé du cours d'algèbre linéaire - 2

1 Déterminants

Définition 1.1 *Soient* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *et* $i, j \in \{1, \cdots, n\}$*. On dit que le couple* (i, j) **présente une inversion pour** σ *(ou est une* **inversion de** σ*) si :* $i < j$ *et* $\sigma(i) > \sigma(j)$*. On note* $I(\sigma)$ *l'ensemble des inversions de* σ *et* $\ell(\sigma)$ *la longueur de* σ *ie le nombre d'inversions.*

Définition 1.2 *On appelle* **signature** *de* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$*, le nombre* $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$*.*

Définition 1.3 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{K}$*. On dit que l'application :*

$$\begin{array}{cccc} f & : & E^p = E \times \cdots \times E & \longrightarrow & F \\ & & (x_1, \cdots, x_p) & \longmapsto & f(x_1, \cdots, x_p) \end{array}$$

est une **application multilinéaire** *ou* p**-linéaire** *si pour tout* i *compris entre* 1 *et* p *et pour tous vecteurs* $x_1,\ldots,x_{i-1}$*,* $x_{i+1},\ldots,x_p$ *fixés, l'application :*

$$\begin{array}{cccc} f_{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_p} & : & E & \longrightarrow & F \\ & & x & \longmapsto & f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_p) \end{array}$$

est une application linéaire de E *dans* F*. Si de plus* $F = \mathbb{K}$*, on dit que* f *est une* **forme** p**-linéaire***.*

Autrement dit on a pour tous vecteurs x et y de E :

$$\begin{array}{l} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, \lambda x + \mu y, x_{i+1}, \cdots, x_p) = \\ \lambda f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \cdots, x_p) + \mu f(x_1, \cdots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \cdots, x_p) \end{array}$$

Définition 1.4 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* $\mathbb{K}$ *et* $v : E^p = E \times \cdots \times E \longrightarrow F$ *une application multilinéaire. On dit que* v *est* **alternée** *si pour tout couple* $(i, j) \in F_p^2$ *tel que* $i \neq j$ *et pour tout* $(x_1, \cdots x_p) \in E^p$ *:*

$$x_i = x_j \quad \textit{implique} \quad v(x_1, \cdots, x_p) = 0$$

Proposition 1.5 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n *sur* $\mathbb{K}$*.*

1. *Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E. *Pour tous vecteurs* $x_1,\ldots,x_n$ *de* E, *on note* $\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$ *leurs coordonnées respectives dans la base* $\mathcal{B}$. *Définissons* ω *par :*

$$\begin{array}{cccc} \omega : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, \ldots x_n) & \longmapsto & \omega(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}. \end{array}$$

   Alors ω *est l'unique forme* n*-linéaire alternée* $E^n \to \mathbb{K}$ *vérifiant* $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$.
2. $\forall v \in \Lambda^n(E, \mathbb{K})$ *on a* $v = v(e_1, \ldots, e_n)\omega$.
3. $\dim(\Lambda^n(E, \mathbb{K})) = 1$.

Notation 1.6 *D'après la proposition précédente si* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *muni d'une base* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, *alors il existe une unique forme* n*-linéaire alternée* ω *telle que* $\omega(e_1, \cdots, e_n) = 1$. *Notons* $det_{\mathcal{B}} = \omega$.

Définition 1.7 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n *muni d'une base* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. *Alors pour toute famille de* n *vecteurs* $(u_1, \ldots, u_n)$ *le scalaire* $det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)$ *s'appelle le* **déterminant de la famille** $(u_1, \ldots, u_n)$ *dans la base* $\mathcal{B}$.

Remarque 1.8 *De la proposition 1.5 on déduit immédiatement que :*

$$\forall v \in \Lambda^n(E, \mathbb{K}), \forall (u_1, \cdots, u_n) \in E^n, v(u_1, \cdots, u_n) = v(e_1, \cdots, e_n) det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$$

Proposition 1.9 *Soit* $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$. *Alors la famille* $(u_1, \cdots, u_n)$ *est liée si et seulement si* $det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = 0$.

Définition 1.10 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n *muni d'une base* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *et soit* $f \in \mathcal{L}(E)$. *Alors :*

$$det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ *et définit ce que l'on appelle le déterminant de* f.

Proposition 1.11 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* n *sur* $\mathbb{K}$. *Soient* f *et* g *deux endomorphismes de* E. *Alors :*

$$det(f \circ g) = det(f) det(g)$$

Proposition 1.12 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* n.

1. *Alors* $det(Id_E) = 1$.
2. *Un endomorphisme* f *de* E *est un automorphisme de* E *si et seulement si* $det(f) \neq 0$. *Si* f *est un automorphisme alors :* $det(f^{-1}) = \dfrac{1}{det(f)}$.

Définition 1.13 *Soit* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *une matrice. On pose*

$$det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

Proposition 1.14 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n *sur* $\mathbb{K}$ *muni d'une base* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$*. Soient* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *la matrice de* f *dans* $\mathcal{B}$*. Alors*

$$det(f) = det(A).$$

Proposition 1.15 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$*, alors*

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Définition 1.16 *Soit* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$*. La transposée* ${}^tA$ *de* A *est la matrice dont les coefficients sont les* $\tilde{a}_{i,j}$*, avec* $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$*.*

Proposition 1.17 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, alors* $det({}^tA) = det(A)$*.*

Proposition 1.18 *Si une colonne (ou une ligne) est combinaison linéaire d'autres colonnes (ou lignes) alors* $det(A) = 0$*. En particulier, si deux colonnes (ou deux lignes) sont égales, alors* $det(A) = 0$*.*

Proposition 1.19 (Opérations sur les colonnes)

1. *Si à la colonne* $C_j(A)$ *(ou à la ligne* $L_i(A)$*) on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes* $\sum_{k \neq j} \lambda_k C_k(A)$ *(ou des autres lignes* $\sum_{k \neq i} \lambda_k L_k(A)$*),* **le déterminant reste inchangé***.*
2. *Si on permute deux colonnes (ou deux lignes) de* A*,* **le déterminant change de signe***.*
3. *Si on multiplie une colonne (ou une ligne) de* A *par* μ*, alors* **le déterminant de** A **est multiplié par** μ*.*

Définitions 1.20 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*

— *On appelle* **cofacteur** *de* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *d'indice* (i,j) *le coefficient*

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} det(A(i,j))$$

— *La matrice* $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *s'appelle la* **matrice des cofacteurs** *ou* **comatrice***.*

Théorème 1.21 *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* k *un entier tel que* $1 \leqslant k \leqslant n$*. Alors :*

1. $det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} det(A(i,k)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ik}$*. On dit qu'on* **développe suivant la colonne** k*.*

2. $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} det(A(k,j)) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \tilde{a}_{kj}$. *On dit qu'on* **développe suivant la ligne** k.

Proposition 1.22 (Règle de Sarrus) *On a :*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

Définition 1.23 *Une matrice* $A = (a_{i,j})$ *est dite triangulaire si elle est triangulaire inférieure (ie* $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$*) ou triangulaire supérieure (ie* $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$*).*

Proposition 1.24 *Soit* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *une matrice triangulaire. Alors* $det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Corollaire 1.25 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* A *est inversible si et seulement si* $det(A) \neq 0$. *Si* A *est inversible,* $A^{-1} = \dfrac{{}^t\tilde{A}}{det(A)}$.

Théorème 1.26 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. *Alors* A *est de rang* r *si et seulement si :*

1. *Il existe une matrice carrée* A' *extraite de* A *de format* (r,r) *telle que* $det(A') \neq 0$.
2. *Pour tout* $s > r$, *toute matrice carrée* A'' *de format* (s,s) *extraite de* A *vérifie* $det(A'') = 0$.

2 Réduction des endomorphismes

2.1 Critères via le polynôme caractéristique

Définition 2.1 *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. S'il existe un vecteur* **non nul** *x de E tel que $u(x) = \lambda x$, alors on dit que :*

1. *λ est une* **valeur propre** *de u.*
2. *x est un* **vecteur propre** *de u associé à λ.*

On appelle **spectre** *de u et on note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u.*

Définition 2.2 *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A le scalaire :*

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition 2.3 *Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors $tr(AB) = tr(BA)$.*

Proposition et définition 2.4 *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $tr(Mat_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas de la base choisie $\mathcal{B}$ et s'appelle la* **trace** *de u. On le note $tr(u)$.*

Proposition et définition 2.5 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La fonction*

$$\begin{array}{cccc} \chi_u & : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \longmapsto & det(u - xId_E) \end{array}$$

est une fonction polynomiale de degré n. De plus :

$$\chi_u(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr(u) X^{n-1} + \cdots + det(u)$$

χ_u s'appelle le **polynôme caractéristique** *de u.*

Proposition 2.6 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ si et seulement si λ est racine de χ_u.*

Définition 2.7 *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. On dira que λ est une valeur propre d'ordre m si λ est une racine d'ordre m de χ_u. L'entier m s'appelle la* **multiplicité** *de λ et sera noté $m(\lambda)$.*

Définition 2.8 *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. Le sous-espace vectoriel $E_\lambda(u) := Ker(u - \lambda Id_E)$ s'appelle le* **sous-espace propre** *associé à la valeur propre λ.*

Proposition 2.9 *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. Alors :*

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m(\lambda)$$

Théorème 2.10 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les sous-espaces propres de u sont en somme directe.*

Théorème 2.11 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.*
2. *Il existe une base $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de u.*
3. *E est la somme directe des sous-espaces propres de u.*
4. *χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ (i.e. χ_u a toute ses racines dans $\mathbb{K}$) et pour toute valeur propre de u, $\dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda)$.*

Définition 2.12 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est* **diagonalisable** *si l'une des 4 conditions équivalentes du théorème 2.11 est vérifiée.*

Définition 2.13 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est* **trigonalisable** *s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.*

Théorème 2.14 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ (i.e. χ_u se décompose en un produit de polynômes du premier degré).*

Corollaire 2.15 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie. Alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.*

Théorème 2.16 (Cayley-Hamilton) *Soit u un endomorphisme de E, alors :*

$$\chi_u(u) = 0$$

2.2 Théorie du polynôme minimal

Définition 2.17 *Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Alors on dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{I}$ de A est un* **idéal** *si :*

1. *$(\mathcal{I}, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.*
2. *$\forall a \in A\ ,\ \forall x \in \mathcal{I}\ ,\ ax \in \mathcal{I}$.*

Définition 2.18 *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit unitaire si le coefficient du monôme de plus haut degré vaut 1.*

Proposition et définition 2.19 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Considérons le sous-ensemble de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ suivant :*

$$\mathcal{I}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X]\ ;\ P(u) = 0\}$$

Alors $\mathcal{I}(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** *de u. Tout polynôme P de $\mathcal{I}(u)$ est appelé* **polynôme annulateur** *de u.*

Proposition et définition 2.20 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\mathcal{I}(u) \neq \{0\}$ et il existe un unique polynôme μ_u de $\mathcal{I}(u)$ de degré minimal et unitaire. Ce polynôme engendre $\mathcal{I}(u)$, c'est-à-dire que $\mathcal{I}(u) = \{\mu_u Q \,|\, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.*

Autrement dit, μ_u est l'unique polynôme annulateur de u de degré minimal et unitaire. Il divise tous les polynômes annulateurs de u.

μ_u s'appelle le **polynôme minimal** *de u.*

Théorème 2.21 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et si toutes ses racines sont simples.*

Corollaire 2.22 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de u qui est scindé et qui n'admet que des racines simples.*

2.3 Décomposition de Dunford-Jordan

Proposition et définition 2.23 *Soient $F_1, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique k-uplet $(p_1(x), \ldots, p_k(x)) \in F_1 \times \ldots \times F_k$ tel que : $x = \sum_{i=1}^{k} p_i(x)$.*

Les applications p_i sont linéaires et $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ s'appelle **famille de projecteurs** *de E associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$.*

Définition 2.24 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle* **indice** *de u le plus petit entier i_0 tel que $Ker(u^{i_0}) = Ker(u^{i_0+1})$. On a :*

$$\{0\} = Ker(u^0) \subsetneq \cdots \subsetneq Ker(u^{i_0}) = Ker(u^{i_0+1}) = Ker(u^{i_0+2}) = \cdots$$

Définition 2.25 *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Le sous-espace vectoriel $C_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id_E)^{m(\lambda)}$ s'appelle le* **sous-espace caractéristique** *associé à la valeur propre λ.*

Proposition 2.26 *Pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$ on a :*

$$\dim(C_{\lambda_i}(u)) = m(\lambda_i)$$

Théorème 2.27 (Décomposisition de Dunford-Jordan) *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe un unique couple (d, ν) d'endomorphismes de E tel que :*

1. $u = d + \nu$.
2. $d \circ \nu = \nu \circ d$.
3. *d est diagonalisable et ν est nilpotent.*

De plus si $\mu_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, alors $d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$ où $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est la famille de projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{r} C_{\lambda_i}(u)$, et l'indice de ν est $N = \max_{1 \leqslant i \leqslant r}(\beta_i)$.

3 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

3.1 Convergence dans les espaces vectoriels et exponentielle matricielle

Définition 3.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle* **norme** *sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

1. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad ; \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
3. $\forall(x, y) \in E \times E \quad ; \quad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.

Définition 3.2 *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tend vers $x \in E$ si $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$.*

Définition 3.3 *Deux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont* **équivalentes** *s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$:*

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1$$

Les suites convergentes pour $\| \ \|_1$ ou $\| \ \|_2$ sont alors les mêmes et ont la même limite.

Théorème 3.4 *Si E est de* **dimension finie** *alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Définition 3.5 *Soit $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ une série de E. On dit $\sum_{k\geqslant 0} u_k$* **converge absolument** *si la série numérique $\sum_{k\geqslant 0} \|u_k\|$ converge.*

Proposition 3.6 *Soit $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ une série de E qui converge absolument. Alors $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est convergente.*

Proposition 3.7 *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ définissons :*

$$|||u||| := \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|$$

Alors $||| \ |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$ qui satisfait :

1. $\forall x \in E \ , \ \|u(x)\| \leqslant |||u||| \|x\|$.
2. $\forall(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2 \ , \ |||u \circ v||| \leqslant |||u||| |||v|||$.

$||| \ |||$ *s'appelle* **norme d'algèbre**.

Proposition 3.8 (dérivée d'un produit de matrices) *Soient :*

$$\begin{array}{rcccc} A & : & I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ & & t & \longmapsto & A(t) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcccc} B & : & I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & & t & \longmapsto & B(t) \end{array}$$

deux fonctions dérivables sur I. Alors la fonction

$$\begin{array}{rcccl} AB & : & I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}) \\ & & t & \longmapsto & A(t)B(t) \end{array}$$

est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, (AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Proposition et définition 3.9 (exponentielle d'une matrice) *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} A^k$ est convergente. Sa somme notée e^A ou $\exp(A)$ s'appelle l'***exponentielle** *de A. De plus :*

$$|||e^A||| \leqslant e^{|||A|||}$$

Proposition 3.10

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors :*
$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P$$
2. *Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $AB = BA$ alors :*
$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$$
et
$$B e^A = e^A B$$
3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors e^A est toujours inversible et :*
$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

Proposition 3.11 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t \longmapsto e^{tA}$ est de classe C^∞ et $f'(t) = Ae^{tA}$.*

3.2 Application aux systèmes linéaires

Définition 3.12 *Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, soit $b_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2$ soit $a_{ij} \in \mathbb{K}$.*

1. *Le système :*
$$(\mathcal{SL}) \qquad \begin{cases} y_1' & = & a_{11}y_1 + & \cdots & +a_{1n}y_n + b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 + & \cdots & +a_{nn}y_n + b_n \end{cases}$$
s'appelle ***système différentiel linéaire d'ordre** 1 **à coefficients constants**.*
2. *Le système :*
$$(\mathcal{SH}) \qquad \begin{cases} y_1' & = & a_{11}y_1 + & \cdots & +a_{1n}y_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 + & \cdots & +a_{nn}y_n \end{cases}$$
s'appelle ***système différentiel linéaire homogène associé à** $(\mathcal{SL})$.*

Définition 3.13 *On note* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *(une matrice à coefficients dans* $\mathbb{K}$*),* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$*, et* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *(des fonctions à valeurs dans* $\mathbb{K}^n$*). Alors*

$$(\mathcal{SL}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{L}) \ : \ Y' = AY + B$$

et

$$(\mathcal{SH}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{H}) \ : \ Y' = AY$$

Théorème 3.14 *L'ensemble* $S_{\mathcal{H}}$ *des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de* $(\mathcal{H})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ *de dimension* n *formé de fonctions de classe* C^∞*.*

Plus précisément :

$$S_{\mathcal{H}} := \{t \longmapsto e^{tA}C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{K}^n\}$$

De plus pour tout $(t_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ *il existe une unique solution* Y *de* $(\mathcal{H})$ *telle que* $Y(t_0) = Y_0$*.*

Théorème 3.15 ***(Méthode de la variation de la constante)*** *L'ensemble* $S_{\mathcal{L}}$ *des solutions de* $(\mathcal{L})$ *est non vide. Plus précisément pour tout* $t_0 \in I$ *:*

$$\begin{array}{cccl} \phi_0 & : & I & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & & t & \longmapsto & \varphi_0(t) := \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{(t-x)A} B(x)dx \end{array}$$

est une solution de $(\mathcal{L})$*.*

Par ailleurs, soit $\varphi_0 \in S_{\mathcal{L}}$ *une solution. Alors toutes les solutions sont décrites par :*

$$S_{\mathcal{L}} := \{I \longrightarrow \mathbb{K}^n, t \longmapsto e^{tA}C + \varphi_0(t) \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{K}^n\}$$

Définition 3.16 *Soient* $n \geqslant 1$*,* $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ *et* $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *continue.*

1. *L'équation :*
$$(\mathcal{L}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$
s'appelle ***équation différentielle linéaire à coefficients constants****.*
2. *L'équation :*
$$(\mathcal{H}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$
s'appelle ***équation différentielle linéaire homogène associée à*** $\mathcal{L}$*.*

Définition 3.17 *Soient* $n \geqslant 1$*,* $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ *et* $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *continue. On appelle* ***équation caractéristique*** *de l'équation différentielle :*

$$(\mathcal{L}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$$

l'équation :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Théorème 3.18 *Soient* $n \geqslant 1$, $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. *Considérons l'équation homogène :*

$$(\mathcal{H}) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Supposons que les racines de l'équation caractéristique soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ *de multiplicité respectives* $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$. *Alors l'ensemble des solutions* $S_{\mathcal{H}}$ *définies sur* $\mathbb{R}$ *de* $(\mathcal{H})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. *Plus précisément :*

$$S_{\mathcal{H}} := \{y \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad ; \quad \exists (P_1, \cdots, P_r) \in \mathbb{C}_{\alpha_1 - 1}[X] \times \cdots \times \mathbb{C}_{\alpha_r - 1}[X] \quad ; \quad y(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} P_i(t)\}$$