GTGCK Algèbres de Kac-Moody

15/10/18

① Algèbres de Lie semi-simples de dim finie

Soit $\mathfrak{g}$ une telle algèbre $/ \mathbb{C}$

semi-simple $\Leftrightarrow$ Killing non dégénérée
$K(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)$
K est invariante ie $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$, $K([x,y], z) = K(x, [y,z])$

Soit $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ ss-alg de Cartan
$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \phi} \mathfrak{g}_\alpha$ $\quad \phi$ système de racines

Racines : $K_{|\mathfrak{h}}$ est non dégénérée $\rightarrow \forall \alpha \in \phi$, $\alpha(\cdot) = K(t_\alpha, \cdot)$

on peut définir $(\alpha, \beta) := K(t_\alpha, t_\beta)$

Propriétés de rationalité :

$(\alpha, \alpha) > 0$

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$$

$\beta - \langle \alpha, \beta \rangle \alpha \in \phi$

$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$

Coracines on pose $\alpha^\vee := \dfrac{2t_\alpha}{(\alpha,\alpha)} \in \mathfrak{h}$

et on a $\beta(\alpha^\vee) = \langle \alpha, \beta \rangle$

On note $\underset{\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}}{\overset{\Pi}{\shortparallel}}$ une **base** du sys. de racines ϕ base de $\mathfrak{h}^*$

$\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$ base de $\mathfrak{h}$

Π induit : $\phi = \phi^+ \amalg \phi^-$ et une décomp. triangulaire

$$\mathfrak{g} = \underbrace{\bigoplus_{\alpha\in\phi^-} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{n}^-} \oplus \mathfrak{h} \oplus \underbrace{\bigoplus_{\alpha\in\phi^+} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{n}^+}$$

Groupe de Weyl

Pour $\alpha \in \phi$ on définit $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$
$\lambda \mapsto \lambda - \lambda(\alpha^\vee)\alpha$

On pose $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \phi \rangle \subset GL(\mathfrak{h})$

$\cap$

$\mathrm{Bij}(\phi) \Rightarrow W$ est fini.

Matrice de Cartan $A = \left(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \right)_{1\leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$

$$= \left(\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \right) = \mathrm{diag}\left(\frac{2}{(\alpha_i,\alpha_i)}\right) \cdot \left((\alpha_i,\alpha_j)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

diag $\times$ symétrique

Propriétés :
- coeff de A sont dans $\mathbb{Z}$
- sur la diagonale : 2
- en dehors : $\{0,-1,-2,-3\}$
- $a_{i,j} = 0 \Rightarrow a_{j,i} = 0$

Diagramme de Dynkin

= un graphe de sommets $1, \dots, n$
entre les sommets i et j on met $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ arêtes.
et si $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle > \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$

$$\Updownarrow$$

$$(\alpha_i, \alpha_i) < (\alpha_j, \alpha_j)$$

alors on met un signe $i < j$ (α_i plus courte que α_j)

Classification par les diagrammes de Dynkin (connexes) admissibles

Caractérisation : $\mathfrak{g}$ est l'alg. de Lie engendrée par h_i, $e_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$, $f_j \in \mathfrak{g}_{-\alpha_j}$, vérifiant des relations qui dépendent de A.

② Définition d'une algèbre de Kac-Moody

Point de départ : $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ de rang r.

Une réalisation de A est un triplet $(h, \Pi, \Pi^\vee)$ tq :

- h est un $\mathbb{C}$-ev de dim $2n-r$
- $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une famille libre de h^*
- $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$ ——— h

tq $\forall i,j$, $\alpha_j(\alpha_i^\vee) = a_{ij}$

Propriétés
- Il existe une unique réalisation de A à isomorphisme près.
  $(h_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee) \sim (h_2, \Pi_2, \Pi_2^\vee)$ s'il existe $\phi : h_1 \to h_2$ tq $\phi(\Pi_1^\vee) = \Pi_2^\vee$
  ${}^t\phi(\Pi_1) = \Pi_2$
- A et B ont deux réalisations isomorphes ssi A et B coïncident à permutation des indices près.
- $(h, \Pi, \Pi^\vee)$ est une réalisation de A
  $\Rightarrow (h^*, \Pi^\vee, \Pi)$ ——— ${}^tA$.
- Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ alors la réalisation de A est somme directe des réalisations de A_1 et A_2.

Notations
$Q = \mathbb{Z}.\Pi \subset h^*$ "réseau des racines"
$Q^\vee = \mathbb{Z}.\Pi^\vee \subset h$ "réseau des coracines"

déf $\mathfrak{g}^\vee(A)$ = alg de Lie engendrée par

$e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$, $h \in h$ $\quad ((h, \Pi, \Pi^\vee)$ réalisation de $A)$

avec relations
$$\begin{cases} [e_i, f_j] = \delta_{ij}\, \alpha_i^\vee \\ [h, h'] = 0 \quad \forall h, h' \in h \\ [h, e_i] = \alpha_i(h)\, e_i \\ [h, f_j] = -\alpha_j(h)\, f_j \end{cases}$$

Théorème • On a une déc. triangulaire
$\hat{\mathfrak{g}}(A) = \hat{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \hat{n}_+$, où $\hat{n}_+$ = ss-alg engendrée par $e_1, \dots, e_n$
$\hat{n}_-$ = ———————— $f_1, \dots, f_n$

• Plus précisément, $\hat{\mathfrak{g}}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q^-} \hat{\mathfrak{g}}_\alpha \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in Q^+} \hat{\mathfrak{g}}_\alpha$

où on note $Q^+ = (\mathbb{Z}_{\geq 0} \cdot \Pi) \setminus \{0\}$
$Q^- = (\mathbb{Z}_{\leq 0} \cdot \Pi) \setminus \{0\}$
et $\hat{\mathfrak{g}}_\alpha = \{x \in \hat{\mathfrak{g}}(A) \mid [h, x] = \alpha(h) x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$

• $\forall \alpha \in \phi$ $\dim \hat{\mathfrak{g}}_\alpha < +\infty$

• Il existe un idéal τ qui intersecte $\mathfrak{h}$ trivialement et maximal pour cette propriété.
(et $\tau = (\tau \cap \hat{n}^-) \oplus (\tau \cap \hat{n}^+)$)

déf $\mathfrak{g}(A) = \hat{\mathfrak{g}}(A)/_\tau$

L'algèbre de Lie obtenue est encore engendrée par $e_i, f_j, \mathfrak{h}$ et se décompose :
$$\mathfrak{g}(A) = n^- \oplus \mathfrak{h} \oplus n^+ = \bigoplus_{\alpha \in Q^-} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in Q^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

$(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ est le quadruplet associé à A.
A est la matrice de Cartan de $\mathfrak{g}(A)$
n est le rang de A
e_i, f_j sont les générateurs de Chevalley, ils engendrent
$$[\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)] = n^- \oplus n^+ + \langle \alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee \rangle$$

On note $\phi = \{\alpha \in Q \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$
$\phi^\pm = \phi \cap Q^\pm$
les éléments de ϕ sont les "racines"
$\dim \mathfrak{g}_\alpha$ = "multiplicité" de α, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha}$

Propriété Si $\mathfrak{g}^1$ est une alg. de Lie engendrée par une s-alg commutative $\mathfrak{h}^1 \subset \mathfrak{g}^1$ de dim $2n - r$ et des éléments $e_1^1, \dots, e_n^1, f_1^1, \dots, f_n^1$, et $h \in \mathfrak{h}^1$ vérifiant $(*)$
et $\mathfrak{g}^1$ n'a pas d'idéal non trivial intersectant $\mathfrak{h}^1$ trivialement
alors $\mathfrak{g}^1 \simeq \mathfrak{g}(A)$.

Supposons que A est une matrice de Cartan généralisée :

$$\begin{cases} a_{i,j} \in \mathbb{Z} \\ a_{ii} = 2 \\ a_{ij} \leq 0 \text{ si } i \neq j \\ a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0 \end{cases}$$

On dit alors que $\mathfrak{g}(A)$ est une alg. de Kac-Moody.

③ Forme invariante sur $\mathfrak{g}(A)$

On dit que A est symétrisable s'il existe D diagonale et S symétrique telles que $A = D \cdot S$

On note $D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$

$\mathfrak{h} \supset \mathfrak{h}' = \langle \alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee \rangle$

Soit $\mathfrak{h}''$ un supplémentaire : $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{h}''$

$\rightsquigarrow$ Il existe une (unique) forme bilinéaire symétrique $(\cdot,\cdot)$ sur $\mathfrak{h}$ telle que $\begin{cases} (h, \alpha_i^\vee) = \alpha_i(h)\, \varepsilon_i & \forall h \in \mathfrak{h} \\ (h_1'', h_2'') = 0 & \forall h_1'', h_2'' \in \mathfrak{h}'' \end{cases}$

__Propriété__ $(\cdot,\cdot)$ est non-dégénérée.

__dém__ Soit $h \in \mathfrak{h}$ tq $(h, h') = 0 \ \forall h' \in \mathfrak{h}$

donc $h \in \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \ker \alpha_i}_{\text{de dim } n-r} \supset \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \ker \alpha_i|_{\mathfrak{h}'}}_{\text{de dim } n - \text{rang } A = n-r}$

$\Rightarrow =$

$h \in \mathfrak{h}'$ donc $h = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i^\vee$

et $\forall h' \in \mathfrak{h}$, $0 = (h', h) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon_i \alpha_i(h')$

Donc $\sum c_i \varepsilon_i \alpha_i = 0$ donc $\forall i \ c_i = 0$; $h = 0$ ☒

On obtient alors $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{h}^*$: $(t_\alpha, \cdot) = \alpha(\cdot)$

De plus, • $a_{i,j} = \alpha_j(\alpha_i^\vee) = (t_{\alpha_j}, \alpha_i^\vee)$

$$= \alpha_i(t_{\alpha_j})\, \varepsilon_i$$
$$= (t_{\alpha_i}, t_{\alpha_j})\, \varepsilon_i$$

• $2 = a_{i,i} = (t_{\alpha_i}, t_{\alpha_i})\, \varepsilon_i$

D'où :
$$A = (a_{ij}) = \left(\frac{2(t_{\alpha_i}, t_{\alpha_j})}{(t_{\alpha_i}, t_{\alpha_i})} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

<u>Théorème</u> Cette forme s'étend de manière unique en une forme non dégénérée sur $\mathfrak{g}(A)$ et invariante :
$$([x,y],z) = (x,[y,z])$$

<u>Remarque</u> $(\cdot,\cdot)$ dépend du choix de D

On peut choisir D à coeff dans $\mathbb{Q}_{>0}$

S ———— $\mathbb{Q}$

Alors on dit que $(\cdot,\cdot)$ est une forme invariante standard sur $\mathfrak{g}(A)$.

Cela dépend aussi du choix de $\mathfrak{h}''$.

<u>Groupe de Weyl</u>

On a fixé A matrice de Cartan généralisée : $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$

et une réalisation $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ càd $a_{ij} = \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle$

On déf $s_i : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ ou $s_i^\vee : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$

$\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$ $\qquad$ $x \mapsto x - \langle \alpha_i, x \rangle \alpha_i^\vee$

En fait ${}^t s_i = s_i^\vee$

$$W := \langle s_i : i = 1, \dots, n \rangle < GL(\mathfrak{h}^*), GL(\mathfrak{h}).$$

groupe de Weyl

<u>Prop</u> Si A est symétrisable : $A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} S$

alors la forme $(\cdot,\cdot)$ sur $\mathfrak{h}$ est W-invariante.

Trois cas pour A

déf Si $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $u > 0$ si $\forall i,\ u_i > 0$.

On dit que A est de type fini s'il existe $u > 0$ tq $Au > 0$

———— affine ———— $u > 0$ tq $Au = 0$

———— indéfini ———— $u > 0$ tq $Au < 0$

Théo Soit A indécomposable.
A est soit de type fini, soit de type affine, soit de type indéfini.

$$\text{fini} \Downarrow \quad \det A \neq 0 \qquad\qquad \text{affine} \Downarrow \quad \operatorname{rg} A = n-1$$

Caractérisation A est de type fini $\Leftrightarrow$ W fini

$\Leftrightarrow$ ϕ fini

$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}(A)$ alg. de Lie simple de dim finie

$\Leftrightarrow$ A est symétrisable et $(\cdot\,,\cdot)$ est déf positive sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Diagramme de Dynkin

graphe de sommets $1, 2, \dots, n$

on met $a_{i,j}\, a_{j,i}$ arêtes entre i et j si ce produit ≤ 4

sinon, un trait plus épais et on indique $(|a_{i,j}|, |a_{j,i}|)$

Si $|a_{ij}| \geq |a_{ji}|$ et $|a_{ij}| > 1$ on met une flèche $j \to i$

Dans le cas affine, il existe des entiers $u_i > 0$ premiers entre eux tq $Au = 0$. On note les coeff $u_1, \dots, u_n$ sur le diagramme

Ex $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est de type affine car $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$