21/10/18

Groupes de Kac-Moody
2 : algèbres de Kac-Moody affines

(1) Racines réelles et imaginaires

$\alpha \in \Delta$ est réelle s'il existe $w \in W$ tq $w(\alpha)$ est une racine simple.
$\rightsquigarrow \Delta^{re}$, Δ^{re}_+.
Pour $\alpha \in \Delta^{re}$ on définit $\alpha^\vee$ par $\alpha^\vee = w(\alpha_i^\vee)$ si $\alpha = w(\alpha_i)$

Prop 5.1 Soit $\alpha \in \Delta^{re}$. Alors
(a) $\operatorname{mult} \alpha = 1$
(b) $k\alpha \in \Delta \iff k = \pm 1$
(c) Si $\beta \in \Delta$ alors il existe $p, q \geq 0$ tq $p - q = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\beta + k\alpha \in \Delta \cup \{0\} \iff -p \leq k \leq q$
(d) Si A symétrisable avec pdt scalaire $(\mid)$ alors
- $(\alpha \mid \alpha) > 0$
- $\alpha^\vee = \dfrac{2\nu^{-1}(\alpha)}{(\alpha \mid \alpha)}$
- Si $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$ alors $k_i (\alpha_i \mid \alpha_i) \in \mathbb{Z} . (\alpha \mid \alpha)$

(e) Si $\alpha \notin \pm \Pi$, alors $\exists i$: $|\operatorname{ht} r_i(\alpha)| < |\operatorname{ht} \alpha|$.

$\Delta^{im} = \Delta \setminus \Delta^{re}$ racines imaginaires
$\Delta^{im} = \Delta^{im}_+ \amalg -\Delta^{im}_+$

Prop 5.2 (a) Δ^{im}_+ est W-invariant.
(b) Pour $\alpha \in \Delta^{im}_+$, $\exists ! \beta \in -C^\vee$ tq $\alpha \in W \cdot \beta$.
(c) Si A symétrisable alors $\alpha \in \Delta^{im} \iff (\alpha \mid \alpha) \leq 0$.

Prop 5.5 Si $\alpha \in \Delta^{im}_+$ et $r \in \mathbb{Q}$ sont tq $r\alpha \in Q$, alors $r\alpha \in \Delta^{im}$.

En particulier $n\alpha \in \Delta^{im}$ si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

② Algèbres affines

On considère ici une matrice A tq
(m1) A est indécomposable
(m2) $i \neq j \Rightarrow a_{ij} \leq 0$
(m3) $a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ji} = 0$

$u = (u_i)$ et $\forall i,\ u_i \geq 0$

Ceci implique : $(Au \geq 0$ et $u \geq 0) \Rightarrow (u = 0$ ou $u > 0)$

Théorème 4.3 Soit A une matrice satisfaisant (m1), (m2), (m3).
Alors on a un des 3 cas de figure :
(Fin) $\det A \neq 0$. $\exists\, u > 0$ tq $Au > 0$. $Av \geq 0 \Rightarrow v > 0$ ou $v = 0$.
(Aff) corang $A = 1$. $\exists\, u > 0$ tq $Au = 0$. $Av \geq 0 \Rightarrow Av = 0$.
(Ind) $\exists\, u > 0$ tq $Au < 0$. $Av \geq 0$ et $v \geq 0 \Rightarrow v = 0$.

Théo 5.6 Soit A une MCG indécomposable.
(a) Si A est de type (Fin) alors $\Delta^{im} = \phi$
(b) ——— (Aff) alors $\Delta^{im}_+ = \{ n\delta \mid n \in \mathbb{N}^* \}$
(c) ——— (Ind) alors $\exists\, \alpha = \sum k_i \alpha_i$ tq $\forall i$, $k_i > 0$ et $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$.

Prop 5.9 Soit A une MCG. Toute base de racine Π' est dans la W-orbite de Π ou $-\Pi$.

↳ Une base Π' est tq tte racine s'exprime comme combinaison linéaire à coeff de même signe sur Π'.

A est type hyperbolique si A est une MCG indécomposable de type indéfini, et $\forall$ sous-diagramme strict connexe est de type fini ou affine.

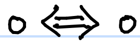
On normalise $(\ |\ )$ de telle sorte que les $(\alpha_i | \alpha_j)$ soient des entiers.
On pose $a = \min\limits_{\alpha \in Q : (\alpha|\alpha) > 0} (\alpha | \alpha)$

Prop 5.10 Soit A une MCG de type fini, affine ou hyperbolique.
(a) L'ens. des racines réelles courtes est $\{ \alpha \in Q : (\alpha|\alpha) = a \}$ et $a = \min\limits_i |\alpha_i|^2$
(b) L'ens. des racines réelles est
$$\left\{ \alpha = \sum_j k_j \alpha_j \in Q \ : (\alpha|\alpha) > 0 \text{ et } \forall j,\ \frac{k_j (\alpha_j|\alpha_j)}{(\alpha|\alpha)} \in \mathbb{Z} \right\}$$
(c) L'ens. des racines imaginaires est $\{ \alpha \in Q \setminus \{0\} : (\alpha|\alpha) \leq 0 \}$
(d) Si A affine, il existe 3 longueurs de racines ssi $A = A_{2l}^{(2)}$, $l \geq 2$.
Dans ce cas ts les éléments de Q de longueur intermédiaire sont des racines.

③ Système de racines dans le cas affine

On suppose qu'on est en type affine ($\dim \ker A = 1$) et de plus en type Aff 1 : Aff 1 $\Leftrightarrow [\ 1\ ]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0} = (\ 1\ )_{\mathfrak{g}_0}$ cf Corollaire 6.4

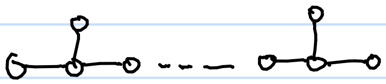
ie on ajoute $-\theta$

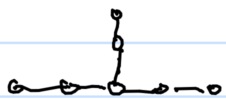
$A_1^{(1)}$  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

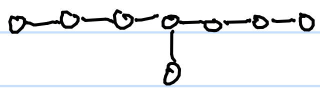
$A_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 2)$ 

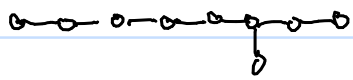
$B_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 3)$ 

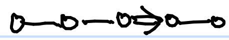
$C_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 2)$ 

$D_\ell^{(1)}$ $(\ell \geq 4)$ 

$E_6^{(1)}$ 

$E_7^{(1)}$ 

$E_8^{(1)}$ 

$F_4^{(1)}$ 

$G_2^{(1)}$ 

Prop 6.3 Dans le cas Aff 1, on a :

- $\Delta^{re} = \{ \alpha + n\delta \mid \alpha \in \mathring{\Delta},\ n \in \mathbb{Z} \}$
- $\Delta^{re}_+ = \{ \alpha + n\delta \mid n > 0 \text{ ou } n = 0 \text{ et } \alpha > 0 \}$
- $\Delta^{im} = \{ n\delta \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$

Prop 6.5 On a un isomorphisme $W \simeq \mathring{W} \ltimes \mathring{Q}$

4) Algèbres affines et algèbres de lacets

$\mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}}) = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}} \mathring{\mathfrak{g}}$, où $\mathcal{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$

Pour $P = \sum p_i t^i \in \mathcal{L}$, on définit $\mathrm{Res}(P) = p_{-1}$

Pour $a, b \in \mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$, déf $\psi(a,b) = \mathrm{Res}\left(\frac{da}{dt} \mid b\right)$, où

$(\mid)$ est un pdt bil. sym. invariant sur $\mathring{\mathfrak{g}}$.

Fait ψ est un 2-cocycle sur $\mathfrak{g}$, ie

$$\begin{cases} \psi(b,a) = -\psi(a,b) \\ \psi([a,b],c) + \psi([b,c],a) + \psi([c,a],b) = 0 \end{cases}$$

Cela vient de $\varphi(Q,P) = -\varphi(P,Q)$

et $\varphi(PQ,R) + \varphi(QR,P) + \varphi(RP,Q) = 0$

par $\varphi(P,Q) = \mathrm{Res}\left(\frac{dP}{dt} \cdot Q\right)$

Soit $\tilde{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$ l'extension de $\mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ définie par le cocycle ψ :

$\tilde{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}}) = \mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}k$ avec

$$[a + \alpha k, b + \gamma k] = [a,b]_{\mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}})} + \psi(a,b)k$$

Soit $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}}) = \mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}}) \oplus \mathbb{C}k \oplus \mathbb{C}d$ avec

$$[a + \alpha k + \beta d, b + \gamma k + \delta d] = [a,b]_{\mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}})} + \beta t\frac{db}{dt} - \delta t\frac{da}{dt} + \psi(a,b)k$$

On a $\mathring{\mathfrak{g}} \hookrightarrow \hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$
$x \mapsto 1 \otimes x$

Soit $\mathfrak{h} = \mathring{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}k \oplus \mathbb{C}d$; on a $\mathring{\mathfrak{h}}^* \hookrightarrow \mathfrak{h}^*$
$\lambda \mapsto \lambda$ tq $\langle \lambda, k\rangle = \langle \lambda, d\rangle = 0$

$\delta \in \mathfrak{h}^*$: $\langle \delta, \mathring{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}k\rangle = 0$

$\langle \delta, d\rangle = 1$

On a : $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathring{\Delta}} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} t^j \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_\alpha \oplus \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} t^j \otimes \mathring{\mathfrak{h}}$

- $x \in \mathring{\mathfrak{h}}$ agit par $\alpha(x)$
- $k \in \mathfrak{h}$ agit par 0
- $d \in \mathfrak{h}$ agit par j

$\Rightarrow$ $\mathfrak{h}$ agit par $\alpha + j\delta$

$\mathfrak{h}$ agit par $j\delta$

D'où $\Delta = \{ j\delta + \alpha \mid j \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathring{\Delta}\} \cup \{ j\delta \mid j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$

cf. Prop 6.3

et $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})_{j\delta+\alpha} = \mathbb{C} \cdot t^j \otimes \mathring{\mathfrak{g}}_\alpha$

$\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})_{j\delta} = t^j \otimes \mathring{\mathfrak{h}}$

Soit $\Pi = (\alpha_0 := \delta - \theta, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$

$\Pi^\vee = (\alpha_0^\vee := \frac{2}{(\theta,\theta)} k - 1 \otimes \theta^\vee, \alpha_1^\vee := 1 \otimes H_1, \dots, \alpha_\ell^\vee := 1 \otimes H_\ell\}$

Prop $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ est une réalisation de la matrice affine A.

Soit A une matrice de type Aff 1, ie $A = (a_{ij})_{0 \le i,j \le \ell}$ et $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee\rangle$ si $i,j \geq 1$
$a_{0,j} = \langle -\theta, \alpha_j^\vee\rangle$
$a_{i,0} = \langle \alpha_i, -\theta^\vee\rangle$

Soit $\mathring{\Delta} \subset \mathring{\mathfrak{h}}^*$ le sys de racines de $\mathring{\mathfrak{g}}$
$(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ base
$(H_1, \dots, H_\ell)$ coracines
E_i, F_i générateurs de Chevalley
θ la plus grande racine de $\mathring{\Delta}$

Soit ω : $e_i \mapsto -f_i$ involution de Chevalley
$f_i \mapsto -e_i$

$F_0 \in \mathring{\mathfrak{g}}_\theta$ tq $(F_0, \omega(F_0)) = \frac{-2}{(\theta|\theta)}$

$E_0 \in \mathring{\mathfrak{g}}_{-\theta}$: $E_0 = -\omega(F_0)$

Alors $[E_0, F_0] = -\theta^\vee$

Soit $e_0 = t \otimes E_0$, $f_0 = t^{-1} \otimes F_0$
$e_i = 1 \otimes E_i$, $f_i = 1 \otimes F_i$ $1 \le i \le \ell$

Théo 7.4 Soit $\mathring{\mathfrak{g}}$ alg. de Lie simple dim finie.
A matrice de Cartan étendue.
Alors $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$ est l'algèbre de K-M associée à A, $\mathfrak{h} \subset \hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$ sous-algèbre de Cartan, Π et $\Pi^\vee$ bases des racines et coracines, et $e_0, \dots, e_\ell, f_0, \dots, f_\ell$ générateurs de Chevalley.

dém cf <u>Prop 1.4a</u> : Soit $\mathfrak{g}$ une alg de Lie, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ss-alg commutative.
Soit $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ éléments de $\mathfrak{g}$,
$\Pi^\vee = (\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee) \subset \mathfrak{h}$, $\Pi = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset \mathfrak{h}^*$ ss-ens lin indép tq :

(1) $[e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}$

(2) $[h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i$
$[h, f_i] = \langle -\alpha_i, h \rangle f_i$

Supp que $e_i, f_i, \mathfrak{h}$ engendrent $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g}$ n'a aucun idéal qui intersecte $\mathfrak{h}$ trivialement.
Soit $A = (\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle)$ et supp $\dim \mathfrak{h} = 2n - \mathrm{rk}(A)$.
Alors $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ est le quadruplet associé à A.

* Vérifions (2) $e_0 = t \otimes E_0$ est de poids $\delta - \theta = \alpha_0$
$f_0 = t^{-1} \otimes F_0$ ——— $-\alpha_0$
e_i de poids α_i
f_i ——— $-\alpha_i$

(1) est vrai pour $1 \leq i, j \leq \ell$
$[e_0, f_i] = 0$ car θ est la plus gde racine.
De même, $[e_i, f_0] = 0$

On a $[E_0, F_0] = -\theta^\vee$ donc
$[e_0, f_0] = \frac{2}{(\theta|\theta)} K - \theta^\vee$
$= \alpha_0^\vee$

$(E_0 | F_0) = \frac{2}{(\theta,\theta)}$ par déf de E_0, F_0

$\left(\frac{de_0}{dt} \middle| f_0\right) = \frac{2}{(\theta,\theta)} t^{-1}$

$\psi(e_0, f_0) = \frac{2}{(\theta,\theta)}$

* Soit $i \subset \hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$ tq $i \cap \mathfrak{h} = 0$.
$\rightsquigarrow \exists \alpha \in \Delta$, $i \cap \mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}})_\alpha \neq 0$.
$\rightsquigarrow \exists j \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathring{\Delta} \cup \{0\}$: $t^j \otimes x \in i$
Soit $y \in \mathring{\mathfrak{g}}_{-\gamma}$ tq $(x|y) \neq 0$: $[t^j \otimes x, t^{-j} \otimes y] \in \mathfrak{h} \cap i$

$$[t^j \otimes x, t^{-j} \otimes y] = j(x|y)K + [x,y]$$

Donc $j = 0$ donc $\gamma \neq 0$ (vu les racines Δ)
Donc $[x,y] \neq 0$!

* Mq $e_i, f_i, \mathfrak{h}$ engendre $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$: soit $\hat{\mathcal{L}}_1(\mathring{\mathfrak{g}}) \subset \hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$ engendrée par $e_i, f_i, \mathfrak{h}$.
E_i, F_i engendrent $\mathring{\mathfrak{g}}$ donc $1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}} \subset \mathcal{L}_1(\mathring{\mathfrak{g}})$
$t \otimes E_0 \in \hat{\mathcal{L}}_1(\mathring{\mathfrak{g}})$. Comme $\mathring{\mathfrak{g}}$ est simple, $t \otimes \mathring{\mathfrak{g}} \subset \hat{\mathcal{L}}_1(\mathring{\mathfrak{g}})$.
Comme $[\mathring{\mathfrak{g}}, \mathring{\mathfrak{g}}] = [\mathring{\mathfrak{g}}]$, on en déduit $t^k \otimes \mathring{\mathfrak{g}} \subset \hat{\mathcal{L}}_1(\mathring{\mathfrak{g}})$ pour $k \in \mathbb{N}$.
De même, $t^{-k} \otimes \mathring{\mathfrak{g}} \subset \hat{\mathcal{L}}_1(\mathring{\mathfrak{g}})$. ∎