Guy Rousseau — Systèmes de Tits

03/11/18

① Systèmes de Tits

déf 5.1.1. Système de Tits = quadruplet (G, B, N, S) tq $S \subset N/B\cap N$ tq

= (B,N)-paires (nom introduit par Tits)

(BN1) $H = B \cap N \triangleleft N$ et S engendre $W := N/B\cap N$

(BN2) G engendré par B, N

(BN3) $\forall s \in S$, $sBs^{-1} \not\subset B$

(BN4) $\forall w \in W$ $\forall s \in S$, $C(s)C(w) \subset C(sw) \cup C(w)$

où $C(w) = BwB$

Exemples 5.1.2 k corps

1) $G_1 = SL_{n+1}(k)$ $\quad B = B_1 = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$ $\quad T = \begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$

$N = N_G(T) = \{\text{matrices monomiales}\}$ $\quad B \cap N = T$

$W = N/T = \mathfrak{S}_{n+1}$ $\quad S = (s_1, \dots, s_n)$ $\quad s_i = (i, i+1)$

Dans G_1 on a les groupes radiciels $U_{\alpha_{i,j}} = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} 1 & & k \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \subset G_1$

2) $G_2 = SL_{n+1}(k((t)))$ $\quad R = k[[t]]$

$B_2 = \begin{pmatrix} R^* & & R \\ & \ddots & \\ tR & & R^* \end{pmatrix}$ $\quad H = \begin{pmatrix} R^* & & \\ & \ddots & \\ & & R^* \end{pmatrix}$

Iwahori : $B_2 \bmod tR = B_1$

$W = N/H \simeq \mathfrak{S}_{n+1} \ltimes \mathbb{Z}^n$

$(p_1, \dots, p_{n+1}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} t^{p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{p_{n+1}} \end{pmatrix}$

$\sum p_i = 0$

2bis) G_2 vu comme gr de Kac-Moody maximal

même B. $\quad N = \{\text{matrices monômiales dans } k[t, t^{-1}]\}$

⇓ coeff de la forme $k^* \cdot t^{\mathbb{Z}}$

en fait il faut ajouter $k^* \times k^*$, comme dans 3)

$H = \begin{pmatrix} k^* & & \\ & \ddots & \\ & & k^* \end{pmatrix}$ $\quad W$ idem

associé à $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(k[t,t^{-1}]) \oplus kc \oplus kd$

racines $\Phi_{re} = \{\alpha_{i,j} + l\delta \mid 1 \leq i \neq j \leq n+1, \ l \in \mathbb{Z}\}$

$U_{\alpha_{i,j} + l\delta} = \begin{pmatrix} 1 & & *t^l \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \simeq k$

3) gr de K-M minimal

$G_3 = (SL_{n+1}(k[t,t^{-1}]) \cdot k^*) \ltimes k^*$

$K = k[t, t^{-1}]$ $\quad (K^* = k^* \cdot t^{\mathbb{Z}})$

$R = k[t]$

$B = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \ltimes \begin{pmatrix} R & & R \\ & \ddots & \\ tR & & R \end{pmatrix}$

$N = \{\text{matrices monomiales à coeff dans } K^*\}$

$W = N/B\cap N = \mathfrak{S}_{n+1} \ltimes \mathbb{Z}^n$

Théorème 5.1.3 (G, B, N, S) sys de Tits

(a) $\forall s \in S$, s d'ordre 2

(b) $\forall Y \subset S$, soit $W_Y = \langle Y \rangle \subset W$ $\quad P_Y = BW_YB$ sg de G

(c) déc. de Bruhat : $G = \coprod_{w \in W} BwB$

$$\forall Y, Y' \subset S, \quad G = \coprod_{w \in W_{Y'} \backslash W / W_Y} P_{Y'} w P_Y$$

(d) $$C(s)\, C(w) = \begin{cases} C(sw) & \text{si } \ell(sw) \geq \ell(w) \\ C(sw) \cup C(w) & \text{sinon} \end{cases}$$

(e) (W, S) Coxeter

(f) $w = s_1 \cdots s_p$ déc. réduite $\Rightarrow C(s_i) \subset \langle C(w) \rangle = \langle w, wBw^{-1} \rangle$

(g) $P_Y = P_{Y'} \Leftrightarrow Y = Y'$

(h) $N_G(P) = P \quad \forall P$ parabolique

P, Q paraboliques standard. P et Q conjugués $\Leftrightarrow$ égaux

(i) Soit $Y \subset S$ et soit $W'_Y = \{ w \in W \mid \forall v \in W_Y, \ \ell(wv) \geq \ell(w) \}$

Soit $w \in W'_Y$ écrivons $w = w_1 \cdots w_k$ avec $w_i \in W$

tq $\ell(w) = \ell(w_1) + \cdots + \ell(w_k)$

(i1) Si $A_i \subset C(w_i)$ tq $A_i \hookrightarrow C(w_i) \to C(w_i)/B$ bijective (resp. surj)

alors $A_1 \times \cdots \times A_k \to BwP_Y/P_Y$ est bijective (resp. surj)

(i2) Si $w_i \in S$: on considère $Z_i \subset P_{w_i}$ tq $Z_i \ni e$ et $Z_i \to P_{w_i}/B$ surj.

Alors $Z_1 \times \cdots \times Z_k \to G/P_Y$ a pour image $\bigcup_{v \leq w} BvP_Y/P_Y$

dém

dém de (c_1).

$G = \bigcup_{w \in W} BwB$ par (BN2) (BN4) et (a).

$C(v) = C(w) \Rightarrow v = w$?

récurrence sur $d = \inf(\ell(v), \ell(w)) = \ell(w)$

$d = 0$: $w = e$ $\quad v \in C(v) = C(w) = B \leadsto v = e$

$d > 0$: $w = sw'$ $\quad s \in S \quad \ell(w') = \ell(w) - 1$

$\leadsto sw'B \subset C(w) = C(v) \qquad w'B \subset sC(v) = C(v) \cup C(sv)$

$C(w') = C(v)$ ou $C(sv)$

$\ell(sv) \geq \ell(v) - 1 \geq \ell(w') - 1 < d$

Si $C(w') = C(sv)$

réc $\Rightarrow w' = sv$

$w = sw' = v$

Si $C(w') = C(v)$

réc $\Rightarrow w' = w$ absurde

② Systèmes de Tits topologiques

Déf 5.1.4 (G, B, N, S) sys. de Tits top si :

(BN5) G gr. top. séparé tq $B, N \subset G$ ss-gr fermés
$B \cap N$ ouvert dans N ($\Rightarrow W$ discret)

(BN6) $\forall s \in S$, P_s/B homéomorphe à $S^{n(s)}$ (sphère réelle de dim $n(s)$)

et $\pi_s : P_s \to P_s/B$ a une section locale continue
($\Rightarrow \pi_s$ est un B-fibré principal)

($\Rightarrow k = \mathbb{R}$ ou $k = \mathbb{C}$)

Exemple 1 $P_{s_1} = \begin{pmatrix} * & * & & * \\ * & * & & \\ & & \ddots & * \\ 0 & 0 & & * \end{pmatrix}$ $\quad P_{s_1}/B = SL_2(k) \Big/ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = \mathbb{P}^1(k)$

$k = \mathbb{R}$; S^1
$k = \mathbb{C}$; S^2

Théorème 5.1.5 (G, B, N, S) sys de Tits topo ; $Y \subset S$.

(a) On supp P_Y fermé et G/P_Y séparé.
Soit $w \in W_Y'$. Alors $\overline{BwP_Y} = \coprod_{\substack{v \leq w, \\ v \in W_Y'}} BvP_Y$.

$\Rightarrow$ Les B-orbites dans G/P_Y sont loc. fermées.

(b) Si G/B est séparé et si W_Y est fini alors P_Y est fermé.

(c) Supposons P_Y fermé et G/P_Y séparé.
Soit $\pi_Y : G \to G/P_Y$

Sur G/P_Y on considère la topologie limite inductive.
Alors $A \subset G/P_Y$ fermé $\Leftrightarrow \pi_Y^{-1}(A) \cap \overline{BwP_Y}$ fermé dans G $\forall w \in W$.
Alors G/P_Y est un CW-complexe de cellules $P_Y w P_Y/P_Y$.

dém de a) $P_s = B \cup C(s)$, $\pi_s : P_s \to P_s/B$ compact

affir : $\exists A_s \subset P_s$ compact, $e \in A_s$ tq $A_s B = P_s$
et si $\mathring{A}_s = A_s \cap C(s)$, $\overline{\mathring{A}_s} = A_s$

argument : $P_s/B = \bigcup_{i \in I \text{ fini}} U_i$ tq $\overline{U_i}$ compact et $\exists$ section σ_i sur $\overline{U_i}$

$A_i = \sigma_i(\overline{U_i}) \rightsquigarrow A_s = \bigcup_i A_i$

Soit $w \in W_Y'$ $\quad w = s_1 \cdots s_n$
Par (ii) : $A_{s_1} \cdots A_{s_n} \cdot P_Y = \bigcup_{\substack{v \leq w \\ v \in W_Y'}} BvP_Y$ $\quad (*)$

Comme G/P_Y séparé, l'image de $A_{s_1} \cdots A_{s_n}$ est compact donc fermé dans G/P_Y. Donc $A_{s_1} \cdots A_{s_n} P_Y$ fermé ds G.
Alors $\overline{\mathring{A}_{s_1} \cdots \mathring{A}_{s_n} P_Y} = A_{s_1} \cdots A_{s_n} P_Y$ $\quad (**)$

Mais $\mathring{A}_{s_i} B = C(s_i)$ par (ii) de 5.1.3

Donc $\mathring{A}_{s_1} \cdots \mathring{A}_{s_n} P_Y = BwP_Y$. $\quad (***)$

La preuve de (a) découle de $(*)$, $(**)$ et $(***)$ ■

③ Amalgames

Déf I ensemble.

M_i, $M_{ij} = M_{ji}$ des groupes

$\varphi_{i,j} : M_{i,j} \to M_i$

Le produit amalgamé est (M, φ_i) où $\varphi_i : M_i \to M$ homom. tq

(PA1) $\forall i,j \quad \varphi_i \circ \varphi_{i,j} = \varphi_j \circ \varphi_{i,j}$ comme morphisme $M_{i,j} \to M$

(PA2) Si (L, ψ_i) vérifie (PA1) alors

$$\exists !\, \psi : M \to L \quad \text{tq} \quad \forall i,\ \psi_i = \psi \circ \varphi_i$$

Cas particulier M_i sous-groupe d'un groupe M.

$$M_{ij} = M_i \cap M_j \quad \begin{tikzcd} M_i \cap M_j \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & M_i \arrow[d, hook] \\ M_j \arrow[r, hook] & M \end{tikzcd}$$

Si $(M, (\varphi_i))$ est produit amalgamé, on dit que M est produit amalgamé de ses sous-groupes M_i.

Si (M,φ_i) est produit amalgamé des (M_i, M_{ij}) alors M est engendré par les $\varphi_i(M_i)$ (prendre $L = \langle \varphi_i(M_i) \rangle$) et tt gr. engendré par les $\varphi_i(M_i)$ est quotient de M. C'est le gr. qui a "le moins de relations"

Prop 5.1.7 (G, B, N, S) sys de Tits, alors :

G est produit amalgamé de $\{N, (P_s)_{s\in S}\}$

Théo 5.1.8 S fini. $(B, N, (P_s)_{s\in S})$ groupes.

Supp :
(P1) $\forall s \neq s'$, $P_s \cap P_{s'} = B$
(P2) $H := B \cap S \lhd N$
(P3) $\forall s \in S$ $N_s := N \cap P_s$ alors $|N_s/H| = 2$. On écrit $N_s/H = \{e, s\}$.
(P4) $P_s = B \cup BsB$
(P5) $(W = N/H, S)$ gr de Coxeter
(P6) $\pi : N \to W$ $n \in N$ $n = n_1 \cdots n_p$ tq $\pi(n_i) \in S$
$w = \pi(n) = \pi(n_1) \cdots \pi(n_p)$ déc. réduite

On déf par récurrence $B(n_1, \dots, n_p) \subset B$
et $\gamma(n_1, \dots, n_p) : B(n_1, \dots, n_p) \to B$ homomorphisme

$p = 1$. dans P_{s_1}, $B(n_1) := B \cap n_1^{-1} B n_1 \xrightarrow{\mathrm{Int}\, n_1} B$

pour $i > 1$, dans P_{s_i}, $B(n_1, \dots, n_i) := B \cap n_i^{-1} B(n_1, \dots, n_{i-1}) n_i \xrightarrow{\mathrm{Int}\, n_i} B(n_1, \dots, n_{i-1}) \xrightarrow{\gamma(n_1, \dots, n_{i-1})} B$

$\gamma(n_1, \dots, n_i)$

On demande que $B(n_1, \dots, n_p)$ ne dépende que de $w = \pi(n)$ $\leadsto$ noté B_w
$\gamma(n_1, \dots, n_p)$ ——— n $\leadsto$ noté γ_n

(P7) Si $\ell(ws) = \ell(w) + 1$ alors $B_w B_s = B$

(P8) $s, t \in S$, $w \in W$ tq $wtw^{-1} = s$ et $\ell(wt) = \ell(w) + 1$

alors $\forall m \in \pi^{-1}(s)$, $\forall n \in \pi^{-1}(w)$, $\forall b \in B \setminus B_t$, $\exists y \in b B_t \cap B_n$
$y', y'' \in B_n$

tq (a) $m'^{-1} y m' = y' m' y''$ dans P_t

(b) $m \gamma_n(y) m^{-1} = \gamma_n(y') m^{-1} \gamma_n(y'')$ dans P_s

où $m' := n^{-1} m^{-1} n \in \pi^{-1}(t)$.

(P9) $\forall s$ $B \ntriangleleft P_s$

Alors : $N \cup \bigcup_{s\in S} P_s$ s'injecte dans G produit amalgamé

et (G, B, N, S) est un système de Tits.

C'est comme ça qu'on définit les groupes de K-M.

Commentaire sur (P6)

$w = s_1 \cdots s_p$ déc. réduite, représentants $n_1, \dots, n_p$ dans P_{s_1} $\quad n_i \in P_{s_i}$

$B(n_1) = B \cap (n_1^{-1} B n_1)$

$\gamma(n_1) = \mathrm{Int}\, n_1 : B(n_1) \to B$

Exemple : ① $G = SL_{n+1}(k)$

$B = T \cdot \langle U_\alpha \mid \alpha > 0 \rangle \qquad n_1 B n_1^{-1} = T \cdot \langle U_\alpha \mid \begin{smallmatrix} \alpha > 0 \text{ et } \alpha \neq \alpha_1 \\ \alpha = -\alpha_1 \end{smallmatrix} \rangle$

$B(n_1) = T \langle U_\alpha \mid \begin{smallmatrix} \alpha > 0 \\ \alpha \neq \alpha_1 \end{smallmatrix} \rangle \xrightarrow{\gamma(n_1)} T \langle U_\alpha \mid \begin{smallmatrix} \alpha > 0 \\ \alpha \neq \alpha_1 \end{smallmatrix} \rangle = B(n_1^{-1})$

$$\begin{tikzcd} B(n_1, n_2) = B \cap \langle n_2^{-1} B(n_1) n_2 \rangle \arrow[r, "\mathrm{Int}(n_2)"] \arrow[rr, bend right, "\gamma(n_1, n_2)"'] & B(n_1) \arrow[r, "\mathrm{Int}(n_1)"] & B \end{tikzcd}$$

On a : $\gamma(n_1, n_2) \cdot \big(B(n_1, n_2) \big) = B(n_2, n_1)$

En général : $B_w = T \cdot \langle U_\alpha \mid \alpha > 0, w\alpha > 0 \rangle$

$$\downarrow \wr\, \gamma_n$$

$B_{w^{-1}} = T \cdot \langle U_\alpha \mid \alpha > 0, w^{-1}\alpha > 0 \rangle$

idée de démonstration $\quad \tilde{X} = B \times N \times B$, $\quad X = \tilde{X}/\sim$

où $b_1 n b_2 \sim b_1' n' b_2' \iff \begin{cases} \exists h \in H \quad \exists b \in B_n \text{ tq} \\ n' = hn \\ b_2' = h b_2 \\ b_1' = b_1 \gamma_n(b^{-1}) h^{-1} \end{cases}$ $\quad$ moralement $\gamma_n(b^{-1}) = n b^{-1} n^{-1}$

On a des actions à droite et à gauche de B sur X. On les prolonge en des actions de P_s effectives.

$\leadsto$ action de G sur X. $\quad G \to X$
$\qquad g \mapsto g \cdot \overline{(1,1,1)}$

On montre que c'est une bijection.

Systèmes de Tits raffinés

cf Bertrand Rémy, astérisque chapitre 1 : combinatoire pour décrire les groupes de k-M.

déf 5.2.1 Un système de Tits raffiné est (G, N, U_+, U_-, H, S), $H \subset N$, U_+, U_- sous-groupes, $S \subset N/H$ tq   ce qu'il faut pour les ss-gr max.

(RT1) $G = \langle N, U_+ \rangle$, $H \triangleleft N$, H normalise U_+ et U_-
$W := N/_H = \langle S \rangle$ et $\forall s \in S$, $s^2 = 1 \in W$

(RT2) Soit $U_s := U_+ \cap U_-^s$.
Alors, $\forall s \in S$ $\forall w \in W$:

a) $U_s^s \setminus \{1\} \subset U_s s H U_s$

b) $U_s \neq \{1\}$

c) $U_s^w \subset U_+$ ou $U_s^w \subset U_-$

d) $U_+ = U_s \cdot (U_+ \cap U_+^s)$

(RT3) $u_\pm \in U_\pm$, $n \in N$ tq $u_- n u_+ = 1 \Rightarrow u_- = u_+ = n = 1$.

Notation :
- Si $M \subset G$ ss-gr normalisé par H et si $w \in W$ alors $M^w = w^{-1} H w$ " conjugué à droite par w"
- $B_\pm = H U_\pm$

Remarques On a des racines
$$U_{\alpha_s} = U_s$$
$$U_{w\alpha_s} = U_{\alpha_s}^{w^{-1}}$$
$$\phi_{re} = \{w \alpha_s \mid w \in W \ s \in S\}.$$

$U_- = \langle U_\alpha \mid \alpha < 0 \rangle$ On complète dans U_+ mais pas dans U_-

$\Uparrow$

$U_\alpha \subset U_-$

Exemples ① $G_1 = SL_{n+1}(k)$ $U_+ = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ $U_- = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}$ $H = T$

③ $G_3 = SL_{n+1}(k[t, t^{-1}])$ "minimal"

$R = k[t]$

$U_+ = \begin{pmatrix} 1+tR & & R \\ & \ddots & \\ tR & & 1+tR \end{pmatrix}$ $U_- = \begin{pmatrix} 1+t^{-1}k[t^{-1}] & & t^{-1}k[t^{-1}] \\ & \ddots & \\ k[t^{-1}] & & 1+t^{-1}k[t^{-1}] \end{pmatrix}$

② bis $G_2 = SL_{n+1}(k((t)))$ $U_+ = \begin{pmatrix} 1+t\hat{R} & & \hat{R} \\ & \ddots & \\ t\hat{R} & & 1+t\hat{R} \end{pmatrix}$ $U_- = U_-$ de l'exemple 3

$\hat{R} = k[[t]]$

"maximal" : complété dans U_+

Commentaire sur (RT2)(a) :

$s = s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ $U_s = \begin{pmatrix} 1 & k & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ $U_s^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ k & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

dans SL_2, si $a \neq 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = B_+ = H\,U_+$

Lemme 5.2.2

ⓐ $\forall s \in S \quad \forall w \in W$

a1) $sBw \subset (Bsw\,U_s^w) \cap (Bsw \cup Bw\,U_s^{sw})$

a2) Il y a deux possibilités exclusives :

(i) $U_s^w \subset U_+$ et $U_s^{sw} \subset U_-$

(ii) $U_s^w \subset U_-$ et $U_s^{sw} \subset U_+$

ⓑ (G, B, N, S) système de Tits (et donc (W, S) Coxeter)

ⓒ $U_s^w \subset U_+ \iff U_s^{sw} \subset U_- \iff \ell(sw) > \ell(w)$

dém a1. Par (RT2)(d), $sBw = s(U_+ \cap U_+^s)\,H U_s\,w$ (*)

$= (U_+ \cap U_+^s)\,H\,sw\,U_s^w \subset Bsw\,U_s^w$

(*) : $sBw = (U_+ \cap U_+^s)\,U_s^s\,H\,sw$

$\subset (U_+ \cap U_+^s)(\{1\} \cup U_s\,sHU_s)\,H\,sw$

$\subset Bsw \cup B\,U_s^s\,H\,w \subset Bsw \cup Bw\,U_s^{sw}$

a2 : (RT2)(c) : $U_s^w \subset U_+$ ou U_- : ou exclusif par (RT3)

$U_s^{sw} \subset U_+$ ou U_-

Par (RT2)(a) : $U_s\,U_s^s\,U_s \cap N \neq \{1\}$

donc $U_s^w\,U_s^{sw}\,U_s^w \cap N \neq \{1\}$

Or $U_\pm \cap N = \{1\}$.

b : (BN1) $B \cap N = H$ par (RT3)

(BN2) ✓

(BN3) $sBs = B^s \supset U_s^s \subset U_-$

donc $sBs \cap U^- \neq \{1\}$

donc $sBs \not\subset B$ (BN3)

(BN4) : $BsBwB \subset BwB \cup BswB$

En effet, par (a1) : $BsBwB \subset B(Bsw \cup Bw\,U_s^{sw})B$

$\subset BswB \cup BwB$ si $U_s^{sw} \subset U_+$

et $BsBwB \subset B(Bsw\,U_s^w)B \subset BswB$ si $U_s^w \subset U_+$

c : Si $U_s^w \subset U_+$ alors $BsBwB \subset BswB$ donc $\ell(sw) > \ell(w)$

Si $U_s^{sw} \subset U_+$:

alors (a1) : $BsBwB \subset BwB \Rightarrow \ell(w) > \ell(sw)$

Théorème (G, B, U_+, U_-, H, S) système de Tits raffiné.

$v, w \in W$ tq $\ell(vw) = \ell(v) + \ell(w)$. Alors :

a) $U_- \cap U_+^{vw} = (U_- \cap U_+^{v})^{w} \odot (U_- \cap U_+^{w})$

produit unique

b) $U_+ \cap U_-^{vw} = (U_+ \cap U_-^{v})^{w} \odot (U_+ \cap U_-^{w})$

(+) $U_+^{w} = (U_+^{w} \cap U_-) \odot (U_+^{w} \cap U_+)$

c) $U_+ \cap U_+^{w} = (U_+ \cap U_-^{v})^{w} \odot (U_+ \cap U_+^{vw})$

d) $U_+ v B = U_+ \odot vH \odot (U_+ \cap U_-^{v})$

e) $U_- v B = U_- \odot vH \odot (U_+ \cap U_-^{v})$

f) $G = U_+ U_- N = U_- U_+ N$

g) Birkhoff $\quad G = \coprod_{n \in N} U_- n U_+$

h) $\bigcap_{w \in W} U_-^{w} = \{1\}$

(i) $U_- = \langle U_s^{w} \mid \ell(sw) > \ell(w) \rangle$

Commentaire $U_+ \cap U_-^{w} = U_{s_1}^{s_2 \cdots s_n} \odot U_{s_2}^{s_3 \cdots s_n} \odot \cdots \odot U_{s_{n-1}}^{s_n} \odot U_{s_n}$

si $w = s_1 \cdots s_n$ déc. réduite.