19/11/18 # Introduction aux ind-variétés

déf Une ind-variété X est un ens qui admet une filtration $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \cdots$ tq

1) $X = \bigcup_n X_n$
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n est une var. alg. sur k
3) $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ immersion fermée

De plus, X est affine si $\forall n$, X_n est affine
X est projective ——— projective

Exemple ① Si X var. alg. : $X_n = X$

② $\mathbb{A}^\infty = \{(a_0, \dots,) \mid a_i \in k, \text{ presque tous nuls}\}$
: $\mathbb{A}^\infty = \bigcup_n \mathbb{A}^n$ à $\mathbb{A}^n = \{(a_1, \dots) \mid a_k = 0 \text{ si } k \geq n\}$

③ Si V esp. vect. de dim. dénombrable alors $\mathbb{P}V$ est une ind-variété projective.

③ GL_∞ pour $GL_n \hookrightarrow GL_{n+1}$
$$(*) \mapsto \begin{pmatrix} * & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

④ $G^{min} = \bigcup_{n \geq 0} X_n \qquad X_n = \left(\bigcup_{\ell(w) \leq n} BwB\right) \cap \left(\bigcup_{\ell(w) \leq n} B^- w B^-\right)$
variété de Richardson

⑤ $SL_n(k) \qquad k = \mathbb{C}((t)) \qquad \mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$
$SL_n(k)/SL_n(\mathcal{O}) = \bigcup_{p \geq 0} \left\{ \begin{matrix} \text{matrices de } SL_n \text{ à coeff} \\ \text{un poly en } t^{-1} \text{ de degré} \leq p \end{matrix} \right\}$ (?)

⑥ X, Y deux ind-variétés alors $X \times Y$ est une ind-variété

Morphismes :

déf • $X = \cup X_n$ et $Y = \cup Y_n$, $f : X \to Y$ est un morphisme de ind-var si :
$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m(n)$ tq $f(X_n) \subset Y_{m(n)}$ et
$f_{|X_n} : X_n \to Y_{m(n)}$ est un morphisme de var.

• $f : X \to Y$ est une immersion fermée si :
+ $f_{|X_n} : X_n \to Y_{m(n)}$ est une immersion fermée.
+ $f(X)$ est fermé dans Y.
+ $f : X \to f(X)$ est un homéo.

déf Topologie de Zariski
$U \subset X$ est ouvert si $\forall n \quad U \cap X_n$ ouvert dans X_n.
($\Rightarrow X_n$ fermé dans X)

déf $k[X] = \varprojlim k[X_n]$ ie $f = (f_0, f_1, \dots f_k, \dots)$ tq $f_{n+1|X_n} = f_n$

$k[X]$ est un anneau topologique si on munit $k[X_n]$ de la topologie discrète : f et g sont proches s'il existe n tq $f_n = g_n$.

Rem $k[X \times Y] = k[X] \hat{\otimes} k[Y]$

et $k[X] \otimes k[Y]$ est dense dans $k[X] \hat{\otimes} k[Y]$.

Si $\varphi : X \to Y$ morphisme de ind-variétés alors φ est continue et induit $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$.

déf $X = \cup X_n = \cup X'_n$ sont deux structures de ind-variétés *équivalentes* si $Id : X \to X$ est un isomorphisme de ind-variétés.

Si U ouvert de $X = \bigcup_n X_n$, alors $U = \bigcup_n U \cap X_n$ est une ind-var

Y fermé de $X = \bigcup_n X_n$, — $Y = \bigcup_n Y \cap X_n$ ——

Faisceau structural : $\mathcal{O}_X(U) = k[U]$

Lemme 4.1.2 Si $g : Z \to X$ application continue alors

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m(n) \in \mathbb{N} : g(Z_n) \subset X_{m(n)}$

Conséquence Si $f : X \to Y$ est une immersion fermée

Pour $g : Z \to X$,

g est un morphisme de ind-var ssi $f \circ g : Z \to Y$ est un morphisme de ind-var
une immersion fermée ... une immersion fermée.

dém par l'absurde

Soit $n \geq 0$ tq $\forall m$ $g(Z_n) \not\subset X_m$.

$\to$ on trouve $x_{m_i} \in g(Z_n) \cap (X_{m_i} \setminus X_{m_{i-1}})$

Soit $S = \{x_{m_i}\}$

Soit $T \subset S$ $T \cap X_m$ est fini pour tout m donc fermé dans X_m

donc T fermé dans X donc dans S

donc S a la top. discrète.

$g^{-1}(S)$ fermé dans Z_n donc ss-var. de Z_n.

et $g^{-1}(x_{m_i})$ ouvert de $g^{-1}(S)$ pour tout i.

Donc $g_n^{-1}(S)$ a une infinité de cptes connexes ?