Christoph Bärligea — 10/12/18

Définition des groupes de K-M.

① Groupes de KM maximaux

A matrice de Cartan généralisée, $\mathfrak{g}$ alg Kac-Moody associée.
On définit $\hat{\mathfrak{n}} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ avec produit

$$\left[\sum_{\alpha\in\Delta^+} x_\alpha , \sum_{\beta\in\Delta^+} y_\beta\right] = \sum_{\gamma\in\Delta^+}\left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} [x_\alpha, y_\beta]\right)$$

sommes infinies

On définit $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \hat{\mathfrak{n}}$

Soit $\hat{\mathfrak{n}}(k) = \prod_{\substack{\alpha\in\Delta^+ \\ ht(\alpha)\geq k}}$. On obtient une pro-algèbre pro-nilpotente par la famille $\mathcal{F} = \{\mathfrak{a} \text{ idéal tq } \exists k : \mathfrak{a} \supset \hat{\mathfrak{n}}(k)\}$

Soit $\mathcal{U}$ le pro-groupe pro-unipotent correspondant à $\hat{\mathfrak{n}}$.

$x \in \hat{\mathfrak{n}} \rightsquigarrow \mathcal{U}_x = \exp \mathbb{C} x$

déf $\Theta \subset \Delta^+$ est fermée si $\forall \alpha,\beta\in\Theta$ tq $\alpha+\beta\in\Delta^+$, on a $\alpha+\beta\in\Theta$
Soit Θ fermé. Alors $\hat{\mathfrak{n}}_\Theta = \prod_{\alpha\in\Theta}\mathfrak{g}_\alpha$ est une sous pro-algèbre pro-nilpotente de $\hat{\mathfrak{n}}$.
$\rightarrow$ Soit $\mathcal{U}_\Theta = \exp(\hat{\mathfrak{n}}_\Theta)$.

$\mathcal{U}_\Theta$ est distingué dans $\mathcal{U}$ si $\alpha\in\Delta^+$, $\beta\in\Theta$ tq $\alpha+\beta\in\Delta^+ \Rightarrow \alpha+\beta\in\Theta$

déf Θ est cofermé si $\Delta^+\setminus\Theta$ est fermé

Exemple
(a) $x \in \mathfrak{g}_\alpha\setminus\{0\} \to \mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}_x$

(a') α racine simple $\rightsquigarrow \mathcal{U}_{\Delta^+\setminus\{\alpha\}} \triangleleft \mathcal{U}$

(b) $w\in W$, $\Phi_w = \{\alpha>0,\ w^{-1}(\alpha)<0\}$

$\hat{\mathfrak{n}}_{\Phi_w} \subset \hat{\mathfrak{n}}$ ss-alg. de Lie

$\dim \hat{\mathfrak{n}}_{\Phi_w} = \ell(w)$

(c) $Y \subset \{1,\dots,\ell\}$, $\Delta_Y^+ = \{\text{racines positives de } \langle\alpha_i \mid i\in Y\rangle\}$

$\mathcal{U}_{\Delta^+\setminus\Delta^+_Y} \triangleleft \mathcal{U}$

$\mathcal{U}_{\Delta^+\setminus\Delta^+_Y} \rtimes \mathcal{U}_{\Delta^+_Y}$

déf $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ est une algèbre de Cartan entière si :

- $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{h}$ est un $\mathbb{Z}$-mod de type fini
- $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathfrak{h}$, $\alpha_i \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$
- $\alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$
- $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} / \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\cdot\alpha_i^\vee$ est sans torsion

déf $T = \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*)$ tore de dimension $\dim \mathfrak{h}$

$$\mathrm{Lie}\ T = \mathfrak{h} = \mathrm{Hom}(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C})$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp} : \mathrm{Lie}(T) &\to T \\ f &\mapsto e^f \text{ tq } \forall \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*,\ e^f(\lambda) = \exp(\langle f, \lambda\rangle) \end{aligned}$$

On a $X(T) \simeq \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$

$$c^\lambda \leftarrow\!\shortmid \lambda$$

tq $c^\lambda(t) = t(\lambda)$

déf $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$, $z \in \mathbb{C}^*$, $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$

$\rightsquigarrow z^h \in T$ où $z^h(\lambda) = z^{\langle h, \lambda\rangle}$

déf Soit N engendré par $T \cup \{\tilde{s}_i\}_{1 \le i \le \ell}$ avec relations

- $\tilde{s}_i\, t\, \tilde{s}_i = s_i(t)$
- $(\tilde{s}_i)^2 = (-1)^{\alpha_i^\vee} \in T$

Corollaire 6.18 $1 \to T \xrightarrow{\theta} N \to N/T \simeq W \to 1$

$\theta : T \cup \{\tilde{s}_i\} \to N$ est injectif

L'action de N/T sur T s'identifie à l'action de W.

Sous-algèbres paraboliques

$Y \subset \{1, \dots, l\} \rightsquigarrow \mathfrak{g}_Y = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_Y} \mathfrak{g}_\alpha$

$$\mathfrak{u}_Y = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta^+_Y} \mathfrak{g}_\alpha$$

$$\mathfrak{p}_Y = \mathfrak{g}_Y \oplus \mathfrak{u}_Y$$

déf Y est de type fini si $\dim \mathfrak{g}_Y < \infty$

déf Soit Y de type fini. On définit $\hat{\mathfrak{p}}_Y = \mathfrak{g}_Y \oplus \hat{\mathfrak{u}}_Y$ où $\hat{\mathfrak{u}}_Y = \hat{\mathfrak{n}}_{\Delta^+ \setminus \Delta^+_Y}$

pro-structure sur $\hat{\mathfrak{p}}_Y$: Soit $\beta = \sum n_i \alpha_i \in \Delta$

$\rightsquigarrow ht_Y(\beta) = \left| \sum_{i \notin Y} n_i \right|$

$$\hat{\mathfrak{u}}_Y(k) = \prod_{\substack{\beta \in \Delta^+ \\ ht_Y(\beta) \geq k}} \mathfrak{g}_\beta$$

$\hat{\mathfrak{p}}_Y$ est une pro-algèbre avec la famille

$$\mathfrak{F} = \{ \mathfrak{a} \subset \hat{\mathfrak{p}}_Y \text{ idéal tq } \exists k : \mathfrak{a} \supset \hat{\mathfrak{u}}_Y(k) \}$$

Rem $\hat{\mathfrak{u}}_Y$ est un pro-idéal de $\hat{\mathfrak{p}}_Y$.

$\mathfrak{g}_Y$ est une sous-pro-algèbre de $\hat{\mathfrak{p}}_Y$.

6.1.13 Sous-groupes paraboliques

$Y \subset \{1, \dots, \ell\}$ de type fini

On associe à $(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*, \Delta_Y, \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}, \Delta_Y^\vee)$ un groupe $\mathcal{G}_Y$ tel que
$\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_Y) = \mathfrak{g}_Y$ et $T = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*, \mathbb{C}^*)$ est un tore maximal dans $\mathcal{G}_Y$.

Rem Un $\mathfrak{h}$-module de poids (ie $V = \bigoplus V_\lambda \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)$) est intégrable, c'est-à-dire il devient un T-module au moyen de $t v_\lambda = t(\lambda) v_\lambda$ pour $t \in T, v_\lambda \in V_\lambda, \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$

déf Soit V un $\mathfrak{g}_Y$-mod.
On dit que V est un $(\mathfrak{g}_Y, T)$-mod si la structure de $\mathfrak{h}$-mod est intégrable.

Rem Un $(\mathfrak{g}_Y, T)$-mod de dim finie V devient un $\mathcal{G}_Y$-mod
$\pi : \mathcal{G}_Y \to \mathrm{Aut}(V)$ tq π étend la structure de T-module.

Pour $k \geq 1$, $M_k = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \Delta^+ \\ \mathrm{ht}_Y(\alpha) = k}} \mathfrak{g}_\alpha$ est un $(\mathfrak{g}_Y, T)$-module sous l'action adjointe

$\Rightarrow M_k$ un $\mathcal{G}_Y$-module

$\Rightarrow \hat{\mathfrak{u}}_Y = \hat{\mathfrak{n}}_{\Delta^+ \setminus \Delta_Y^+}$ est un $\mathcal{G}_Y$-module et $\mathcal{G}_Y$ agit par automorphismes d'alg de Lie continus (pro-automorphismes)

$\Rightarrow \mathcal{G}_Y \xrightarrow{\phi} \mathrm{Aut}(\mathcal{U}_Y)$

On définit $\hat{\mathcal{P}}_Y = \mathcal{U}_Y \rtimes \mathcal{G}_Y$

Lemme 6.1.14 $\hat{\mathcal{P}}_Y$ est un pro-groupe avec famille

$\mathcal{F}_Y = \{ N \lhd \hat{\mathcal{P}}_Y \text{ tq } \exists k : N \supset \mathcal{U}_Y(k)$ et $N/\mathcal{U}_Y(k)$ est fermé dans $\mathcal{U}_Y/\mathcal{U}_Y(k) \rtimes \mathcal{G}_Y \}$

$\mathcal{U}_Y \lhd \hat{\mathcal{P}}_Y$ avec pro-structures compatibles
$\mathrm{Lie}(\hat{\mathcal{P}}_Y) = \mathfrak{p}_Y = \mathfrak{g}_Y \oplus \hat{\mathfrak{u}}_Y$

Lemme 6.1.15 $Y_1 \subset Y_2 \subset \{1, \dots, \ell\}$, Y_2 de type fini
$\exists \ \gamma : \hat{\mathcal{P}}_{Y_1} \to \hat{\mathcal{P}}_{Y_2}$ tq $\dot{\gamma} : \hat{\mathfrak{p}}_{Y_1} \subset \hat{\mathfrak{p}}_{Y_2}$

6.1.16 Groupes de Kac-Moody

$\mathcal{B} = \hat{\mathcal{S}}_\emptyset$, $\hat{\mathcal{S}}_i = \hat{\mathcal{S}}_{\{i\}}$, $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{\{i\}}$ pour $1 \leq i \leq \ell$

$$N_i = \langle T, \tilde{s}_i \rangle = T \cup T\tilde{s}_i$$

$\theta_i : N_i \hookrightarrow \mathcal{G}_i \subset \hat{\mathcal{S}}_i$

tq $\theta_{i|T} = \mathrm{Id}_T$, $\theta_i(\tilde{s}_i) = \exp(f_i)\exp(-e_i)\exp(f_i)$

θ_i bien défini car $\theta_i(\tilde{s}_i)^2 = (-1)^{\alpha_i^\vee}$ (calcul dans SL_2)

θ_i injectif

déf • $\gamma_i : \mathcal{B} \hookrightarrow \hat{\mathcal{S}}_i$

• $Z = \left(\coprod_{i \in \{1,\dots,\ell\}} \hat{\mathcal{S}}_i \coprod N \right) / \sim$

où (a) $\gamma_i(b) \sim \gamma_j(b)$ $\forall b \in \mathcal{B}$ $\forall i,j$

(b) $\forall n \in N$ $\forall i$, $n \sim \theta_i(n)$

On a $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{S}}_i \subset Z$, $N \subset Z$, $\mathcal{B} \cap N = T$

déf Soit $\mathcal{G}$ le produit amalgamé de $(N, \hat{\mathcal{S}}_i, 1 \leq i \leq \ell)$

Thm $Z \xhookrightarrow{\text{can}} \mathcal{G}$

Alors $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, N, S)$ est un système de Tits

déf $Y \subset \{1,\dots,\ell\}$ non nécessairement fini

$\hat{\mathcal{S}}_Y = \mathcal{B} W_Y \mathcal{B}$

les deux définitions coïncident pour Y de t.f.