Complexe de faisceaux d'intersection.

Nancy – 01/02/17

Introduction

X variété quasi-projectives

Dernières séances : filtration de Whitney $\Rightarrow IC_j(X) \Rightarrow IH_j(X)$.

$\rightsquigarrow$ remplacer par $IC_j((X))$ combinaisons linéaires infinies de simplexes.

$\rightsquigarrow$ faisceautisation : $\mathcal{IC}^{-j}((X))$

Pb
- $\mathcal{IC}^j((X))$ dépend de la filtration de Whitney
- la notion de filtration de Whitney n'est pas invariante par homéomorphisme (n'a pas de sens pour var. top.)

Solution (Goresky – McPherson)
$\mathcal{IC}^p((X))$ a des propriétés topologiques qui le caractérisent à quasi-iso près.

Coro $\mathcal{H}^p(\mathcal{IC}^*((X)))$
- ne dépend pas de la filtration de Whitney
- est un invariant topologique

Coro $IH^*(X)$ est un invariant topologique
(si $X \underset{\text{homéo}}{\simeq} Y$ alors $IH^*(X) \simeq IH^*(Y)$)

Bonus
- Filtration canonique $(X^j_{can})_j$ de X par les strates sur lesquelles $\mathcal{H}^p(\mathcal{IC}^*((X)))$ est localement constant.
on a $X^j_{can} \subset X^j$ pour tte filtration de Whitney (X^j) de X.

- Construction de Deligne de $\mathcal{IC}^*((X))$ à partir d'une filtration :
  - $\rightarrow$ filtration de Whitney
  - $\rightarrow$ filtration canonique

① Faisceaux fins

d'après Voisin, Théorie de Hodge et géo. complexe, prop 4.36

X espace topologique, $\mathcal{F}$ faisceau sur X.

déf Un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ a des partitions de l'unité si pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, il existe $(f_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}(X)$ tels que $\sum_{i\in I} f_i = 1$ (somme localement finie) et $\mathrm{Supp}(f_i) \subset U_i$.

déf $\mathcal{F}$ est fin s'il existe un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ ayant des partitions de l'unité tel que $\mathcal{F}$ soit un faisceau de $\mathcal{A}$-modules.

Exemple Si X var. $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{F} = A^p(X)$, le faisceau des p-formes, est un faisceau fin pour $\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(X)$.

Proposition Si $\mathcal{F}$ est un faisceau fin, on a $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$ pour $i>0$

Rem Donc en particulier, si $\mathcal{A}$ a des partitions de l'unité, $H^i(X,\mathcal{A}) = 0$ pour $i>0$.

dém On considère la résolution de Godement de $\mathcal{F}$
$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$

où $\mathcal{I}^0 = \mathrm{God}(\mathcal{F})$ et $\mathrm{God}(\mathcal{G})(U) := \bigoplus_{x\in U} \mathcal{G}_x$
$\mathcal{I}^{k+1} = \mathrm{God}(\mathcal{I}^k)$

Les faisceaux $\mathcal{I}^k$ sont flasques ie $\forall V\subset U$, $\mathrm{res}_{U\to V}$ est surjective et alors acycliques pour $\Gamma(X,\cdot)$.
Ainsi, $H^k(X,\mathcal{F}) = \dfrac{\ker(\Gamma(\mathcal{I}^k)\to\Gamma(\mathcal{I}^{k+1}))}{\mathrm{Im}(\Gamma(\mathcal{I}^{k-1})\to\Gamma(\mathcal{I}^k))}$.

Par ailleurs, la construction $\mathcal{G} \mapsto \mathrm{God}(\mathcal{G})$ étant fonctorielle, les $\mathcal{I}^\bullet$ sont des $\mathcal{A}$-modules.

Soit maintenant $\alpha \in \ker(\Gamma(\mathcal{I}^k)\to\Gamma(\mathcal{I}^{k+1}))$.
Comme $\mathcal{I}^\bullet$ est une résolution, il existe un recouvrement ouvert (U_i) de X et $\beta_i \in \mathcal{I}^{k-1}(U_i)$ tels que $\alpha_{|U_i} = d\beta_i$.

Soit (f_i) une partition de l'unité subordonnée au rec. (U_i).
Alors $\forall i$, $f_i\beta_i$ est bien défini comme élément de $\Gamma(X,\mathcal{I}^{k-1})$.
De plus, $\sum_i f_i = 1$ est une somme loc. finie, donc
$\beta := \sum_i f_i\beta_i$ est défini dans $\Gamma(X,\mathcal{I}^{k-1})$.

On a $(d\beta)_{|U_i} = d\left(\sum_i f_i\beta_i\right)_{|U_i} = \sum_i f_i (d\beta_i)_{|U_i} = \sum_i f_i \alpha_{|U_i} = \alpha_{|U_i}$

D'où $d\beta = \alpha$.

Ainsi $H^k(X,\mathcal{F}) = 0$ ▨

② Complexe de faisceaux d'intersection

Rappel On avait défini, pour T une triangulation de X, $C_i^T(X)$ le $\mathbb{Z}$-module libre de base $T^{(i)}$ et
$$C_i(X) = \varinjlim_{T} C_i^T(X)$$
un élément de $C_i(X)$ est un couple (T, α) avec $\alpha \in C_i^T(X)$ et on identifie s'il y a des raffinements.

déf On pose $C_i^T((X))$ l'ens des sommes infinies $\sum_{\sigma \in T^{(i)}} a_\sigma \sigma$.
Ce sont des sommes loc. finies car une triangulation est loc. finie par définition.
$$C_j((X)) = \varinjlim_{T} C_j^T((X))$$

Par ailleurs, en prenant T adaptée à une filtration de Whitney, on avait le sous-complexe $IC_j((T))$ qui donne par passage à la limite $IC_j((X))$ (ici on sous-entend la perversité).

Obs $C_j^T((X))$ et donc $C_j((X))$ sont des anneaux car on pose
$$\sum_{\sigma \in T^{(i)}} a_\sigma \sigma \cdot \sum_{\sigma \in T^{(i)}} b_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in T^{(i)}} (a_\sigma b_\sigma)\, \sigma$$

Par ailleurs on peut faisceautiser cette construction et poser

déf $\mathcal{C}^{-j}((X))(U) := C_j((U))$
et $\mathcal{IC}^{-j}((X))(U) := IC_j((U))$

Proposition $\mathcal{E}^{-\delta}((X))$ et $\mathcal{I}\mathcal{E}^{-\delta}((X))$ admettent des partitions de l'unité.

Dém On fait la démonstration pour $\mathcal{E}^{-\delta}((X))$. $\mathcal{I}\mathcal{E}^{-\delta}((X))$ similaire.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X.
On cherche une partition de l'unité subordonnée à (U_i).

Soit T une triangulation de X; ops T adaptée à (U_i) ie :
$\forall \sigma \in T$, $\exists i$ tq $\sigma \subset U_i$.
En effet soit T une triangulation qq.
Soit $\sigma \in T$. $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in \sigma, \exists i : B(x,\delta) \subset U_i$.
Alors une triangulation de σ par des simplexes de diamètre δ convient.

On choisit un tel $i = i(\sigma)$: $\sigma \subset U_{i(\sigma)}$.
On pose $f_i = \sum_{\sigma : i(\sigma) = i} \sigma$.

On a • La somme $\sum_{i\in I}$ est localement finie car $\forall x \in X\ \exists V$ voisinage tq $\{\sigma \in T \mid \sigma \cap V \neq \emptyset\}$ fini.

• $\sum_{i\in I} f_i = \sum_i \sum_{\sigma : i(\sigma) = i} \sigma = \sum_\sigma \sigma = 1$.

• $\mathrm{Supp}(f_i) = \bigcup_{\sigma : i(\sigma) = i} \sigma \subset U_i$ ∎

On obtient alors :

Prop Soit $p > 0$ et δ qq. Alors

$$H^p(X, \mathcal{E}^{\delta}((X))) = 0 \quad \text{et} \quad H^p(X, \mathcal{I}\mathcal{E}^{\delta}((X))) = 0$$

③ Hypercohomologie et suites spectrales

d'après Weibel, An Introduction to homological algebra.

Hypercohomologie

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne.

déf Un complexe double de cochaînes est une famille $(C^{p,q})$ d'objets de $\mathcal{A}$ avec des morphismes $d^h : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$, $d^v : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$ tq
$d^h \circ d^h = 0$, $d^v \circ d^v = 0$, $d^h \circ d^v + d^v \circ d^h = 0$.
Il est borné si $\forall n$ $\{(p,q) : p+q=n,\ C_{pq} \neq 0\}$ est fini.

déf Etant donné un double complexe (X, d^h, d^v) borné, on note $Tot(X)$ le complexe défini par
$$Tot(X)^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{pq} \quad \text{et} \quad d = d^h + d^v.$$

déf Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs.
Soit $Ch(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes A^* d'objets de $\mathcal{A}$ avec $A^i = 0$ si $i < i_0$.
Une résolution de Cartan-Eilenberg de $A^* \in Ch(\mathcal{A})$ est un complexe double I^{**} d'injectifs avec un morphisme de complexes $\varepsilon : A^* \to I^{*0}$ tq $\forall p$:
(1) Si $A^p = 0$ alors $I^{p*} = 0$
(2)
$$\begin{array}{ccc} B_{p*}(I) & & H_{p*}(I) \\ \uparrow B_p(\varepsilon) & \text{et} & \uparrow H_p(\varepsilon) \\ B_p(A) & & H_p(A) \end{array}$$
sont des résolutions injectives dans $\mathcal{A}$.

B_p : bords $\qquad H_p$: cohomologie

Prop Tout complexe de cochaînes a une résolution de Cartan-Eilenberg.

Prop Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur exact à gauche et supposons que $\mathcal{A}$ a assez d'injectifs. Soit $A^* \in Ch(\mathcal{A})$.
Alors deux résolutions I^{**}, J^{**} de A^* sont homotopiquement équivalentes. Les complexes $Tot(I^{**})$ et $Tot(J^{**})$ sont alors équivalents, et on pose $\mathbb{R}^i F(A_*) = H^i\, Tot(F(I)) \in Ob(\mathcal{B})$. Ceci ne dépend pas de I^{**}
$\rightsquigarrow$ on obtient un foncteur $\mathbb{R}_i F : Ch(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$.
foncteur hyperdérivé à droite.

Si $f : A^* \to B^*$ est un quasi-isomorphisme, alors
5.7.7 $\mathbb{R}^i F(f) : \mathbb{R}^i F(A^*) \to \mathbb{R}^i F(B^*)$ est un isomorphisme.

On peut donc aussi définir $\mathbb{R}^i F$ par :

Prop Soit $A^* \in Ch(\mathcal{A})$ et $I^* \in Ch(\mathcal{A})$ constitué d'injectifs et quasi-isomorphe à A^*. On a
$$\mathbb{R}^i F(A^*) \simeq H^i(F(I^*))$$

Suites spectrales

déf Une suite spectrale en cohomologie commençant sur la feuille a est
- une famille $\{E_r^{pq}\}$ d'objets de $\mathcal{A}$ définie $\forall p,q$ et $\forall r \geq a$.
- des différentielles $d_r^{p,q} : E_r^{pq} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ tq $d_r^2 = 0$.
- des isomorphismes $E_{r+1}^{pq} \simeq \operatorname{Ker} d_r^{pq} / \operatorname{Im} d_r^{p-r,q+r-1}$

déf On dit que E_r^{pq} converge vers $H^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i$ s'il existe une filtration

$$0 = F^t H^n \subset \dots \subset F^{p+1} H^n \subset F^p H^n \subset \dots \subset F^s H^n = H^n \text{ tq}$$

$\forall p,q$, $\exists r_0 : \forall r \geq r_0$ $E_r^{pq} \simeq F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q}$.

Dans ce cas, on note $E_r^{pq} \Rightarrow H^{p+q}$.

Proposition Soit $A \in Ch(\mathcal{A})$.

Il existe deux suites spectrales convergentes

$${}^h E_2^{pq} = (R^p F)(H^q(A)) \Rightarrow R^{p+q} F(A)$$

$$\text{et } {}^v E_2^{pq} = H^p(R^q F(A)) \Rightarrow R^{p+q} F(A)$$

Elles sont obtenues en filtrant $\mathrm{Tot}(I^{**})$ par $\mathrm{Tot}\left(\frac{\delta}{\delta}\right)$ et $\mathrm{Tot}(\delta/**)$.

Exemple (hypercohomologie) Soit X un espace topologique.
On applique le formalisme ci-dessus avec $\mathcal{A} = $ (faisceaux sur X), $\mathcal{B} = $ (gr abéliens), $F = \Gamma(X, \cdot)$.
Soit $\mathcal{F}^*$ un complexe de faisceaux borné inférieurement.
On obtient :

$R^i F(\mathcal{F}^*) =: \mathbb{H}^i(\mathcal{F}^*)$.

Si $\mathcal{F}^i$ est injectif $\forall i$, on a $\mathbb{H}^i(\mathcal{F}^*) = H^i(\Gamma(X, \mathcal{F}^*))$

On a les suites spectrales ${}^h E_2^{pq} = H^p(X, \mathcal{H}^q(\mathcal{F}^*)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}^*)$

$${}^v E_2^{pq} = H^p(H^q(X, \mathcal{F}^p)) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{F}^*)$$

Cas du complexe d'intersection

On pose $A^j = \mathcal{IC}^j((X))$

La suite spectrale ${}^v E_2^{pq} = H^p(H^q(X, A^p))$ n'a des termes non nuls que pour $q = 0$, et $H^0(X, A^p) = \Gamma(X, A^p) = IC_{-p}((X))$.

Ainsi, $R^p F(A^*) = IH_p^{cl}(X)$ à support fermé.

④ Notions topologiques

Dimension

d'après (Witold) Hurewicz et (Henry) Wallman

déf • Soit X un espace topologique et $p \in X$.
On dit que X a dimension 0 au point p
si $\forall U$ voisinage de p, $\exists V \subset U$ voisinage de p
tq $\text{Bord}(V) = \phi$.

• X a dimension 0, $\dim(X) = 0$, si $\forall p \in X$, X a dimension 0 au point p.

Exemple • Un espace fini a dimension 0

on prend une boule autour de p de rayon r tq $\forall x \in X$ $d(x,p) \neq r$.

• Un espace Hausdorff dénombrable a dimension 0
• $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ont dimension 0 mais pas leur réunion !
• Le produit de k espaces de dimension 0 a dimension 0

déf • Un espace X a dimension $\leq n$ au point p si $\forall U$ voisinage de p, $\exists V \subset U$ voisinage de p : $\dim(\text{Bord}(V)) \leq n-1$.
• $\dim X \leq n$ si $\forall p \in X$, $\dim_p(X) \leq n$
• $\dim_p X = n$ si $\dim_p X \leq n$ et $\dim_p X \nleq n-1$
• $\dim X = n$ si $\dim X \leq n$ et $\dim X \nleq n-1$

Théorème (Erdös) Soit $L^2(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ l'espace des suites à valeurs rationnelles de carré intégrable. Alors $\dim L^2(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) = 1$.
Annals of maths 1940

dém (que $\dim L^2(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \neq 0$)
Soit U un voisinage de 0 tq $\text{Diametre}(U) \leq \frac{1}{2}$. Mq $\text{Bord}(U) \neq \phi$
$\exists x_1 \in \mathbb{Q}$: $p_1 = (x_1, 0, 0, \dots 0) \in U$
et $d(p_1, L^2(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \setminus U) \leq 1$
$\exists x_2 \in \mathbb{Q}$: $p_2 = (x_1, x_2, 0, \dots, 0) \in U$
et $d(p_2, L^2(\mathbb{N}, \mathbb{Q}) \setminus U) \leq \frac{1}{2}$
On a $p_k \in U$ de diamètre $\leq \frac{1}{2}$, donc $\|p_k\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}$.
Donc $p_k \longrightarrow p$, $p \in \text{Bord}(U)$.

Rem Pour $X = L^2(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$, on a $X \overset{\text{homéo}}{\simeq} X \times X$ et $\dim X = 1$.

Espaces PL   piecewise linear

D'après Hudson, Piecewise linear topology.

déf X esp. top.
Une structure PL sur X est une famille $\mathcal{F}$ d'applications coordonnées $f : P \to X$ tq
(P : polyèdre)

(1) $\forall (f,P),(g,Q)$, $g^{-1}\circ f : f^{-1}(gQ) \to Q$ est linéaire par morceaux

(2) $\forall x \in X$, $\exists (f,P)$ tq $f(P)$ voisinage de x dans X.

déf Un espace PL est un espace topologique complètement séparable (il existe une base dénombrable d'ouverts) et Hausdorff ayant une structure PL.

Exemple Une variété quasi-projective est un espace PL.

déf Une variété PL est une variété topologique qui a une structure PL compatible.

Pseudo-variétés topologiques

X paracompact, Hausdorff

espace paracompact : tout recouvrement ouvert a un raffinement localement fini.

déf • X admet une stratification topologique de dimension 0 si X est un ensemble au plus dénombrable avec la topologie discrète.

• X admet une stratification topologique de dimension n s'il existe une filtration $X = X_n \supset X_{n-1} \supset \cdots \supset X_1 \supset X_0$ par des fermés tq tout $p \in X_i \setminus X_{i-1}$ admet un voisinage N tq
il existe une stratification tp. de dim $n-i-1$
$L = L_{n-i-1} \supset \cdots \supset L_1 \supset L_0 \supset L_{-1} = \emptyset$ et un homéo
$\varphi : \mathbb{R}^i \times \mathrm{Cone}(L) \xrightarrow{\sim} N$ qui envoie $\mathbb{R}^i \times \mathrm{Cone}(L_j)$ sur X_{i+j+1}

Cone sur L : $L \times [0,1[\,/_{(\ell,0)\sim(\ell',0)}$
$\mathrm{Cone}(\emptyset) = pt$

déf Une pseudovariété topologique de dimension n est un espace topologique paracompact Hausdorff qui admet une stratification topologique $X = X_n \supset \cdots \supset X_0$ avec $X_{n-1} = X_{n-2}$.

Ex • variétés analytique complexes
• espaces PL de dimension n tq tout $(n-1)$-simplexe est dans exactement deux n-simplexes.

⑤ Axiomes pour le complexe d'intersection

Faisceaux localement constants et sys. de coefficients locaux

Soit L un A-module et X localement connexe par arcs.

def Le *faisceau constant* de fibre L $\mathcal{E}_{L,X}$ est défini par
$\mathcal{E}_{L,X}(U) = \{ f^{ns}\ U \to L \text{ loc. constantes}\}$
Un faisceau $\mathcal{F}$ sur X est *localement constant* de fibre L si
$\forall x \in X\ \exists U$ voisinage de x tq $\forall y \in U$, $\mathcal{F}(U) \xrightarrow[res]{\sim} \mathcal{F}_y$, et $\mathcal{F}(U) \simeq L$.
$\mathcal{F}$ est *localement trivial* si X est recouvert par des U_i tq $\mathcal{F}_{|U_i} \simeq \mathcal{E}_{L,U_i}$.
Un *système de coefficients locaux* de fibre L est une représentation du groupoïde fondamental dans L.

Lemme Un faisceau localement constant ou localement trivial sur $[0,1]^d$ est trivial.
Un sys de coeff locaux sur $[0,1]^d$ est trivial

dém $(d=1)$ Pour les faisceaux, on trivialise $\mathcal{F}$ sur $[t_i, t_{i+1}]$ recouvrement fini.
Pour les sys de coeff locaux, le groupoïde est trivial. ∎

Prop (1) $\mathcal{F}$ localement constant $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ localement trivial
(2) On a une équivalence de catégories
$(f^x \text{ loc. constants}) \leftrightarrow (\text{sys de coeff locaux})$

dém (1) $\Leftarrow$ ✓
$\Rightarrow$ Soit $x \in X$ et U voisinage de x tq $\forall y \in U$, $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_y$ iso. $\mathcal{F}(U) \underset{L}{\overset{\wr}{}}$
Alors $\mathcal{F}_{|U} \simeq \mathcal{E}_{L,U}$.
En effet, soit $V \subset U$ ouvert connexe et $y \in V$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[rr, "res_{U\to V}"] \arrow[dr, "\wr"', "\text{définition}"'] & & \mathcal{F}(V) \arrow[dl, "\text{lemme}"] \\ & \mathcal{F}_y & \end{tikzcd}$$

On a ↑

Donc $res_{U\to V}$ est un iso.

(2) $\mathcal{F}$ tq $\mathcal{F}(U) = \left\{ \begin{matrix}\text{sections de}\\ \mathcal{L}_{|U}\end{matrix} \right\} \leftarrow\!\shortmid\ \mathcal{L}$ sys. de coeff locaux

σ section $= \sigma : U \to L$
tq $\gamma\sigma(x) = \sigma(y)$
si γ chemin de x à y

$\mathcal{F}$ loc trivial $\mapsto$ action du groupoïde fondamental
donnée par le lemme (avec $d=1$ et $d=2$) ∎

Axiomes $[AX1](X_j)$

Soit X une pseudo-variété et $X = X_n \supset X_{n-1} = X_{n-2} \supset \cdots \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$ une filtration topologique de X.

déf Un complexe de faisceaux $S^\bullet$ est chomologiquement localement constant (CLC) si tous ses faisceaux de cohomologie sont loc. constants.

1.4 Il est constructible pour (X_j) si $\forall j$, $S^\bullet_{|X_j \setminus X_{j-1}}$ est CLC à chomologie de type fini.

On pose $U_k = X \setminus X_{n-k}$, $i_k : U_k \to U_{k+1}$, $j_k : U_{k+1} \setminus U_k \to U_{k+1}$

$X_{n-k} \setminus X_{n-k-1} \to X \setminus X_{n-k-1}$

déf Soit $S^\bullet$ un complexe de faisceaux sur X constructible pour (X_j).

3.3 On dit que $S^\bullet$ vérifie $[AX1](X_j)$ si :

(a) $S^\bullet_{|X \setminus X_{n-2}} \simeq F[n]$ ← système de coefficients locaux

(b) $\mathcal{H}^i(S^\bullet) = 0$ si $i < -n$

(c) $\mathcal{H}^m(S^\bullet_{|U_{k+1}}) = 0$ si $m > p(k) - n$

(d) $\forall k \geq 2$ $\forall x \in X_{n-k} \setminus X_{n-k-1}$ $\forall m \leq p(k) - k + 1$, $H^m(R j_x^! S^\bullet) = 0$

foncteur adjoint du foncteur $Rj_{x!}$, à $j_!$ donné par les sections à support compact

Fait Si $S^\bullet$ complexe de faisceaux constructible sur X, alors

1.12 $H^m(j_x^* S^\bullet) \simeq H^m(N, S^\bullet) = \mathcal{H}^m(S^\bullet)_x$ où N voisinage de x

$H^m(j_x^! S^\bullet) \simeq H_c^m(N, S^\bullet)$

hypercohomologie

hypercohomologie à support compact : $R\Gamma_c(N, \cdot)$ à $\Gamma_c(N, \mathcal{F}) = \{$sections de $\mathcal{F}$ à support compact$\}$

Formulation équivalente de (d) :

On a un morphisme naturel $S^\bullet \to R i_{k*} i_k^* S^\bullet$

L'application induite $H^m(j_k^* S^\bullet_{|U_{k+1}}) \to H^m(j_k^* R i_{k*} i_k^* S^\bullet_{|U_{k+1}})$ est un isomorphisme pour $k \geq 2$ et $m \leq p(k) - n$.

Axiomes [AX2]

déf Soit p une perversité. Le sous-inverse p^{-1} est défini par
$$p^{-1}(\ell) = \min\{c \mid p(c) = \ell\} \quad \text{avec } \min(\emptyset) = +\infty$$

Soit q la perversité complémentaire : $q(k) = k - 2 - p(k)$

déf Soit $S^\bullet$ un complexe de faisceaux constructible (pour une filtration).
4.1 On dit que $S^\bullet$ vérifie les axiomes [AX2] si :

(a) $\exists\, Z \subset X$, $\dim Z \leq n-2$, et $S^\bullet_{|X \setminus Z} \simeq F[n]$

(b) $\mathcal{H}^i(S^\bullet) = 0$ si $i < -n$

(c) $\forall m \geq -n+1$, $\dim\{x \mid H^m(j_x^* S^\bullet) \neq 0\} \leq n - p^{-1}(m+n)$

(d) $\forall m \leq -1$, $\dim\{x \mid H^m(j_x^! S^\bullet) \neq 0\} \leq n - q^{-1}(-m)$

⑥ Résultats

[AX1] (X_j) et construction de Deligne

Etant donné un complexe $S^\bullet$, on considère sa troncation

déf
1.14 $$(\tau_{\leq p} A^\bullet)^n = \begin{cases} A^n & \text{si } n < p \\ \ker d^p & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$$

$$(\tau_{\geq p} A^\bullet)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < p \\ A^p / \ker d^p & \text{si } n = p \\ A^n & \text{si } n > p \end{cases}$$

Construction de Deligne :

On a la filtration par des ouverts $U_1 = U_2 \xhookrightarrow{i_2} U_3 \xhookrightarrow{i_3} \cdots \hookrightarrow U_{n+1} = X$

déf Soit F un système de coeff locaux sur $X \setminus X_{n-2}$.
On pose $P^\bullet_{(X_j)}(F) = \tau_{\leq p(n)-n} Ri_{n*} \circ \cdots \circ \tau_{p(2)-n} Ri_{2*} F[n]$

Théorème 3.5 Le foncteur $P^\bullet_{(X_j)}$ réalise une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux loc. triviaux sur $X \setminus X_{n-2}$ et la sous-catégorie pleine de $D^b(X)$ des complexes satisfaisant $[AX1](X_j)$

Théorème 3.6 Si X est un espace PL avec stratification PL (X_j), alors $\mathcal{IC}^*$ défini pour (X_j) vérifie $[AX1](X_j)$.

Théorème 4.1 Soit F un sys. de coeff. locaux fixé sur $X \setminus X_{n-2}$.
A quasi-isomorphisme canonique près, il existe un unique complexe de faisceaux $S^\bullet(F)$ satisfaisant $[AX2]$.
Il est donné par $P^\bullet_{(X_j)}(F)$ pour n'importe quelle stratification de X.

"**dém**" Soit $\mathcal{S}(X_j) = ($complexes constructibles pour $(X_j))$

(1) Dans $\mathcal{S}(X_j)$, $[AX2] \Leftrightarrow [AX1](X_j)$
(2) Soit (X_j^p) la filtration canonique : $P_{X_j^p}(F)$ satisfait $[AX2]$
(3) $\forall (X_j)$ stratification, $P_{(X_j^c)}(F)$ est constructible pour (X_j).

Filtration canonique

déf (Borel – Moore) Si $A^\bullet$ est un complexe, alors il existe un unique complexe $\mathcal{D}(A^\bullet)$ tq $\forall U \subset X$ ouvert,
$\mathbb{H}^i_c(U, A^\bullet)$ est le dual de $\mathbb{H}^{-i}(U, \mathcal{D}(A^\bullet))$.
(Verdier) Soit $\mathbb{D}^\bullet_X = \mathcal{D}(\mathbb{R}_X)$: on a $\mathcal{D}(A^\bullet) \cong R\mathcal{H}om^\bullet(A^\bullet, \mathbb{D}^\bullet_X)$.

déf 4.2 (filtration p-canonique)
Soit U^p le plus grand ouvert sur lequel $\mathbb{D}^\bullet_X$ est CLC.
Soit $X^p_{n-2} = X \setminus U^p$.
Supp $X^p_{n-2}, \ldots, X^p_{n-k}$ ont été définis.
Soit $U^p_k = X \setminus X^p_{n-k}$ et soit $P^\bullet_k \in D^b(U^p_k)$ obtenu par la construction de Deligne.
Soit $h_k : U^p_k \to X$ inclusion
Soit V' l'ouvert max sur lequel $\mathbb{D}^\bullet_{|X^p_{n-k}}$ et $(Rh_{k*} P^\bullet_k)_{|X^p_{n-k}}$ sont CLC. Soit V réunion des ctes de V' de dim. top. $n-k$.
Soit $X^p_{n-k-1} = X^p_{n-k} \setminus V$.