

# POLYNÔMES DE KAZHDAN–LUSZTIG ET COHOMOLOGIE D’INTERSECTION DES VARIÉTÉS DE SCHUBERT

## 1. ALGÈBRE DE HECKE

Rappelons que si  $(W, S)$  est un système de Coxeter, l’algèbre de Hecke  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_W$  associée est une  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -algèbre sur l’anneau des polynômes de Laurent, avec une base  $(e_w)_{w \in W}$  et la loi de multiplication suivante :

$$e_s e_w = e_{sw} \text{ si } \ell(sw) = \ell(w) + 1,$$

$$e_s e_w = (t^2 - 1)e_w + t^2 e_{sw} \text{ si } \ell(sw) = \ell(w) - 1.$$

La 1ère relation implique

$$e_w = e_{s_1} \cdots e_{s_p}$$

si  $w = s_1 \cdots s_p$  est une écriture réduite.

La 2ème relation implique en particulier

$$(e_s - (t^2 - 1))e_s = e_s e_s - (t^2 - 1)e_s = t^2 \cdot 1$$

autrement dit  $e_s$  est inversible et

$$e_s^{-1} = t^{-2}(e_s - (t^2 - 1)).$$

Il résulte que  $e_w$  est inversible pour tout  $w$ .

D’autre part soit  $i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  l’automorphisme d’anneaux tel que  $i(t) = t^{-1}$  et  $i(e_w) = e_{w^{-1}}$ .

**Théorème (Kazhdan–Lusztig).** Pour tout  $w \in W$  il existe  $c_w$  unique tel que

(1)  $i(c_w) = c_w$

(2)  $c_w = t^{-\ell(w)} \sum_{x \leq w} Q_{x,w}(t) e_x$  où  $Q_{x,w}(t)$  sont des polynômes à coefficients entiers tels que

$$Q_{w,w} = 1 \text{ et } \deg Q_{x,w} \leq \ell(w) - \ell(x) - 1 \text{ si } x < w.$$

De plus  $Q_{x,w}(t) = P_{x,w}(t^2)$  où  $P_{x,w}$  est un polynôme à coefficients entiers de degré au plus  $\frac{1}{2}(\ell(w) - \ell(x) - 1)$  lorsque  $x < w$ .

$Q_{x,w}$  (ou  $P_{x,w}$  ?) sont les polynômes de Kazhdan–Lusztig.

La preuve est purement combinatoire.

**Exemple.** On voit que

$$i(t^{-1}(1 + e_s)) = ti(1) + ti(e_s) = t + te_s^{-1} = t + t^{-1}(e_s - (t^2 - 1)) = t^{-1}(1 + e_s)$$

donc

$$c_s = t^{-1}(1 + e_s).$$

## 2. VARIÉTÉS DE SCHUBERT

Soit  $G$  un groupe algébrique semisimple connexe simplement connexe sur  $\mathbb{C}$ . Soit  $B \subset G$  un sous-groupe de Borel,  $T \subset B$  un tore maximal. On note aussi  $B^-$  le Borel opposé (i.e.,  $B \cap B^- = T$ ).

On note  $N$  le normalisateur de  $T$ . On note  $W = N/T$  le groupe de Weyl. Soit  $S \subset W$  un système de générateurs correspondant à  $B$ .

Cela permet de définir une algèbre de Hecke  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_W$ .

D'autre part  $W$  joue un rôle dans la structure géométrique de  $G$ .

On note  $X = G/B$  la variété de drapeaux. C'est une variété lisse,  $G$ -homogène, projective. On a donc  $X = \{gB : g \in G\}$ . On note aussi qu'il y a une bijection naturelle  $X \rightarrow \{B' \subset G : B' \text{ Borel}\}$ ,  $gB \mapsto gBg^{-1}$ .

Propriété essentielle :  $X$  a un nombre fini de  $B$ -orbites. (Et de  $B^-$ -orbites). Paramétrées par  $W$ .

Plus précisément : on a la décomposition de Bruhat :

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} BwB/B = \bigsqcup_{w \in W} B^-wB/B.$$

On définit  $C_w = BwB/B$  et  $C^w = B^-wB/B$ .

Ce sont des cellules de Schubert.  $C_w \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$  et  $C^w \cong \mathbb{C}^{\dim X - \ell(w)}$ , où  $\ell(w)$  note la longueur de  $w$ .

On s'intéresse davantage à  $C_w$ . On pose  $X_w = \overline{C_w}$  : c'est une *variété de Schubert*.

$X_w$  est l'adhérence d'une  $B$ -orbite donc c'est une union de  $B$ -orbites. Et en effet :

$$X_w = \bigsqcup_{x \leq w} C_x.$$

Notre objectif : calculer le complexe d'intersection de  $X_w$ . Et le relier à l'algèbre de Hecke. Pour cela : on a besoin d'une stratification de  $X_w$ . La décomposition précédente nous fournit une stratification. Encore faut-il justifier que cette stratification a de bonnes propriétés.

## 3. UNE BONNE STRATIFICATION

On obtient une stratification :

$$Z_{\ell(w)} = X_w \supset Z_{\ell(w)-1} \supset \dots \supset Z_0 \supset Z_{-1} = \emptyset$$

où

$$Z_i = \bigsqcup_{x \leq w, \ell(x)=i} C_x.$$

Les strates (les composantes connexes des  $Z_i$ ) sont les  $C_x$ .

C'est une "bonne" stratification car chaque strate  $C_x$  a un "bon" voisinage dans  $X_w$ , obtenu de la manière suivante.

Soient  $U_x \subset B$  et  $U^x \subset B^-$  deux sous-groupes unipotents tels que les applications  $U_x \rightarrow C_x$ ,  $u \mapsto uxB$  et  $U^x \rightarrow C^x$ ,  $u^- \mapsto u^-xB$  soient des isomorphismes.

L'application

$$\varphi : C_x \times C^x \rightarrow X, (uxB, u^-xB) \mapsto uu^-xB$$

est une immersion ouverte. Donc par restriction

$$\varphi(C_x \times (C^x \cap X_w)) \subset X_w$$

est un voisinage ouvert de  $C_x$  dans  $X_w$ . Et c'est un "bon" voisinage sympathique. Il est d'ailleurs de la forme  $\mathbb{R}^t \times (C^x \cap X_w)$  où la parenthèse est une variété affine qui admet une stratification.

La stratification mentionnée au début de la section est de Whitney.

On s'intéresse donc au complexe d'intersection qu'on peut former à partir de cette stratification et on travaille dans la catégorie  $D_S^b(X)$  des faisceaux constructibles relativement à cette stratification.

#### 4. OBJECTIF

On a (par exemple par la construction de Deligne) un complexe d'intersection  $\mathcal{IC}^\cdot(X_w) = \mathcal{IC}^\cdot(X_w, \mathbb{Q})$ .

Cela signifie que sur un ouvert (par exemple sur la strate  $C_w$ )  $\mathcal{IC}^\cdot(X_w)$  est le complexe de faisceaux  $\mathbb{Q}$  concentré en degré  $-\ell(w)$  :

$$(*) \quad \mathcal{IC}^\cdot(X_w)|_{C_w} = \mathbb{Q}[-\ell(w)].$$

Par construction le complexe induit pour tout  $k$  un faisceau de cohomologie :

$$\mathcal{H}^k \mathcal{IC}^\cdot(X_w)$$

qui est constant sur chaque strate (les strates étant les  $B$ -orbites). Si on choisit  $x \leq w$  et  $p \in C_x$ , alors la localisation

$$\mathcal{H}^k \mathcal{IC}^\cdot(X_w)_p$$

est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel dont la dimension ne dépend pas de  $p$ . On peut poser

$$\dim \mathcal{H}^k \mathcal{IC}^\cdot(X_w)_x$$

égal à cette dimension. En faisant varier  $k$ , on obtient un polynôme de Laurent

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim \mathcal{H}^k \mathcal{IC}^\cdot(X_w)_x t^k$$

que l'on souhaiterait comparer au polynôme de Kazhdan–Lusztig.

Étudions le degré de ce polynôme de Laurent.

Par définition du complexe d'intersection on a  $\mathcal{H}^k \mathcal{IC}^\cdot(X_w) = 0$  si  $k < -\dim X_w = -\ell(w)$ .

On écrit

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim \mathcal{H}^k \mathcal{IC}^\cdot(X_w)_x t^k = t^{-\ell(w)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim \mathcal{H}^{k-\ell(w)} \mathcal{IC}^\cdot(X_w)_x t^k$$

et la somme soulignée est un polynôme (sans termes de degrés négatifs) que l'on note  $\hat{Q}_{x,w}(t)$ .

D'après (\*) on a

$$\hat{Q}_{w,w} = 1$$

(donc en particulier  $\hat{Q}_{w,w} = Q_{w,w}$ ).

Concernant le degré, on a certaines restrictions provenant de la construction de Deligne : si  $S_m$  est une strate de codimension  $m > 0$  alors

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{IC}^\cdot(X_w)|_{S_m}) = 0 \text{ si } k \geq m - \ell(w).$$

En appliquant cela à  $C_x$ , on obtient :

$$\dim \mathcal{H}^{k-\ell(w)} \mathcal{IC}^\cdot(X_w)_x = 0 \text{ si } k - \ell(w) \geq (\ell(w) - \ell(x)) - \ell(w)$$

autrement dit

$$\deg \hat{Q}_{x,w}(t) \leq \ell(w) - \ell(x) - 1.$$

(Même majoration que  $Q_{x,w}$ ).

L'objectif (dans la suite de l'exposé) sera de montrer le théorème suivant :

**Théorème :**  $\hat{Q}_{x,w} = Q_{x,w}$ .

Ce théorème a été prouvé par Kazhdan et Lusztig [1]. La démonstration présentée ici est davantage basée sur la référence [2].

**Deux conséquences :** 1)  $\dim \mathcal{H}^{k-\ell(w)} \mathcal{IC}(X_w)_x = 0$  si  $k$  est impair.  
2) (positivité) Les coefficients de  $Q_{x,w}$  sont des entiers positifs ou nuls.

## 5. UN CAS PARTICULIER

Prenons  $w = s$ . On sait que  $X_s = C_s \cup C_1 \cong \mathbb{P}^1$ . On a

$$\mathcal{IC}(X_s)|_{C_s} = \mathbb{Q}[-1] \quad \text{et} \quad \mathcal{IC}(X_s)|_{C_1} = \mathbb{Q}[-1].$$

Donc  $\hat{Q}_{s,s} = 1 = \hat{Q}_{1,s}$ .

**Plus généralement :** soit  $w \in W$  quelconque et  $x \leq w$  tel que  $C_x$  est située dans le lieu régulier de  $X_w$ . Alors  $\mathcal{IC}(X_w)|_{C_x} = \mathbb{Q}[-\ell(w)]$  donc on obtient  $\hat{Q}_{x,w} = 1$  dans ce cas.

En particulier si  $\ell(x) = \ell(w) - 1$ , comme  $X_w$  est régulier en codimension 1, on obtient  $\hat{Q}_{x,w} = 1$ .

(D'ailleurs dans ce cas la majoration du degré donnait  $\deg \hat{Q}_{x,w} \leq \ell(w) - \ell(x) - 1 = 0$ .)

## 6. VARIÉTÉ DE DRAPEAUX DOUBLES

On souhaite une situation plus symétrique. Pour cela au lieu de considérer l'action de  $B$  sur  $X$ , on considère  $X \times X$  et l'action diagonale de  $G$ .

Il y a encore un nombre fini d'orbites, qui sont en fait les mêmes.

Plus précisément il y a une bijection

$$X/B \rightarrow (X \times X)/G, \quad C_w := BwB/B \mapsto G(B, wB) =: \mathbb{O}_w.$$

On note  $\mathbb{X}_w = \overline{\mathbb{O}_w}$ .

Cherchons un lien plus étroit entre ces familles d'orbites (pas seulement une bijection).

Observons qu'on a une application

$$G \times (G/B) \rightarrow X \times X = (G/B) \times (G/B), \quad (g, g'B) \mapsto (g, gg'B).$$

$B$  agit sur la variété de gauche par  $b \cdot (g, g'B) = (gb^{-1}, bg'B)$  et l'application passe au quotient en :

$$G \times^B (G/B) \rightarrow X \times X$$

qui est en fait un isomorphisme d'inverse  $(gB, g'B) \mapsto (g, g^{-1}g'B)$ . On a un fibré localement trivial

$$G \times^B (G/B) \rightarrow G/B$$

de fibre  $G/B$ . On observe que l'isomorphisme ci-dessus se restreint en des isomorphismes :

$$\mathbb{O}_w \cong G \times^B C_w$$

et

$$\mathbb{X}_w \cong G \times^B X_w.$$

D'où le lien cherché : on a un fibré localement trivial

$$\mathbb{X}_w \rightarrow X$$

de fibre  $X_w$ , et qui se restreint en un fibré localement trivial  $\mathbb{O}_x \rightarrow x$  de fibre  $C_x$ .

Il en découle que  $(\mathbb{O}_x)_{x \leq w}$  est une “bonne” stratification de  $\mathbb{X}_w$ . On note  $\mathcal{H}^k \mathcal{IC}^\cdot(\mathbb{X}_w)_x$  la localisation du faisceau de cohomologie en n'importe quel point de la strate  $\mathbb{O}_x$ .

Et on a un lien entre les complexes d'intersection :

$$\mathcal{H}^k \mathcal{IC}^\cdot(\mathbb{X}_w)_x = \mathcal{H}^{k+\dim X} \mathcal{IC}^\cdot(X_w)_x.$$

## 7. OBJECTIF REVU

On doit montrer pour tout  $x \leq w$  :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\dim \mathcal{H}^{k-\ell(w)} \mathcal{IC}^\cdot(X_w)_x}_{=\dim \mathcal{H}^{k-\ell(w)-\dim X} \mathcal{IC}^\cdot(\mathbb{X}_w)_x} t^k = Q_{x,w}(t).$$

Donc on doit montrer :

$$\sum_{x \leq w} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim \mathcal{H}^{k-\ell(w)-\dim X} \mathcal{IC}^\cdot(\mathbb{X}_w)_x t^k e_x = \sum_{x \leq w} Q_{x,w}(t) e_x.$$

En multipliant par  $t^{-\ell(w)}$  on voit qu'il faut montrer :

$$\sum_{x \leq w} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim \mathcal{H}^{k-\dim X} \mathcal{IC}^\cdot(\mathbb{X}_w)_x t^k e_x = c_w$$

ou encore

$$\sum_{x \leq w} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim \mathcal{H}^k \mathcal{IC}^\cdot(\mathbb{X}_w)_x t^k e_x = t^{-\dim X} c_w.$$

Cela suggère la définition suivante : soit  $\mathcal{A}$  un objet de  $D_S^b(X \times X)$  (la catégorie dérivée bornée des complexes de faisceaux constructibles relativement à notre bonne stratification). On note  $\mathcal{H}^k \mathcal{A}_x$  la fibre sur  $\mathbb{O}_x$ . On définit alors un élément de l'algèbre de Hecke en posant :

$$h(\mathcal{A}) := \sum_{x \in W} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim(\mathcal{H}^k \mathcal{A})_x t^k e_x.$$

On doit donc montrer :

$$h(\mathcal{IC}(\mathbb{X}_w)) = t^{-\dim X} c_w.$$

Où le faisceau  $\mathcal{IC}(\mathbb{X}_w)$  est confondu avec son image directe par l'inclusion  $\mathbb{X}_w \rightarrow X \times X$  (foncteur exact car inclusion fermée).

**Exemple :**

$$\mathcal{IC}(\mathbb{X}_s) = \mathbb{Q}_{\mathbb{X}_s}[-\dim X - 1]$$

donc

$$h(\mathcal{IC}(\mathbb{X}_w)) = t^{-\dim X - 1} h(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_s}) = t^{-\dim X - 1} (e_s + 1) = t^{-\dim X} c_s.$$

Dans le cas général, la stratégie est de se ramener aux générateurs  $s$ .

## 8. LEMME CLÉ

D'abord on introduit un produit de convolution sur  $D_G^b(X \times X)$ .

Soit

$$X \times X \xleftarrow{p_{12}, p_{34}} X \times X \times X \times X \xleftarrow{i} X \times X \times X \xrightarrow{p_{13}, p_{24}} X \times X$$

où  $i(a, b, c) = (a, b, b, c)$ .

Partant de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  dans  $D_S^b(X \times X)$  on construit

$$Rq_*(i^*(p_{12}^* \mathcal{A} \times p_{34}^* \mathcal{B})) =: \mathcal{A} \circ \mathcal{B}.$$

**Lemme :** Si la cohomologie du complexe  $\mathcal{A}$  s'annule en degrés impairs (resp. pairs) alors il en est de même pour  $\mathcal{IC}(\mathbb{X}_s) \circ \mathcal{A}$  et on a

$$h(\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_s} \circ \mathcal{A}) = (e_s + 1)h(\mathcal{A}).$$

### 9. RÉOLUTION DE BOTT-SAMELSON

La variété  $\mathbb{X}_w$  est singulière en général. Pour construire une résolution on fixe une écriture réduite

$$w = s_1 \cdots s_r.$$

Soit

$$Y = Y_{s_1, \dots, s_r} = \{(a_0, \dots, a_r) \in X^{r+1} : (a_{i-1}, a_i) \in \mathbb{X}_{s_i}\}.$$

Et soit l'application

$$\pi : Y \rightarrow X \times X, (a_0, \dots, a_r) \mapsto (a_0, a_r).$$

**Propriété :**  $Y$  est lisse et  $\pi$  est une application surjective vers  $\mathbb{X}_w$ , propre, qui est isomorphisme au dessus de  $\mathbb{O}_w$ .

Dans la suite on utilisera le lemme suivant :

**Lemme :**  $R\pi_*\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_{s_1}} \circ \cdots \circ \mathbb{Q}_{\mathbb{X}_{s_r}})|_{\mathbb{X}_w}$ . Donc  $h(R\pi_*\mathbb{Q}) = (1 + e_{s_1}) \cdots (1 + e_{s_r})$ .

La seconde égalité découle de la première (en utilisant le lemme clé). Esquisse de la démonstration de la première égalité (dans le cas particulier où  $r = 2$ ) :

On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} Y & \hookrightarrow & X \times X \times X \xrightarrow{i} X \times X \times X \times X \xrightarrow{p_{12}, p_{34}} X \times X \\ \pi \downarrow & & \downarrow q = p_{13} \\ \mathbb{X}_w & \hookrightarrow & X \times X \end{array}$$

Par changement de base (comme  $q$  est propre) on a pour tout complexe  $\mathcal{A}$  sur  $X \times X \times X$  :

$$R\pi_*(\mathcal{A}|_Y) = (Rq_*\mathcal{A})|_{\mathbb{X}_w}.$$

On applique cette formule pour

$$\mathcal{A} = i^*(p_{12}^*\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_{s_1}} \otimes p_{34}^*\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_{s_2}}).$$

On observe que la composition  $Y \hookrightarrow X \times X \times X \xrightarrow{i} X \times X \times X \times X$  coïncide ce qui entraîne  $Y \hookrightarrow \mathbb{X}_{s_1} \times \mathbb{X}_{s_2} \hookrightarrow X \times X \times X \times X$  donc

$$R\pi_*(\mathcal{A}|_Y) = R\pi_*\mathbb{Q}$$

et d'autre part on a par définition de la convolution

$$(Rq_*\mathcal{A})|_{\mathbb{X}_w} = (\mathbb{Q}_{\mathbb{X}_{s_1}} \circ \mathbb{Q}_{\mathbb{X}_{s_2}})|_{\mathbb{X}_w}.$$

D'où le lemme (pour le cas  $r = 2$ ).

## 10. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Par récurrence on montre  $\hat{c}_w := t^{\dim X} h(\mathcal{IC}(\mathbb{X}_w)) = c_w$ . On doit montrer que  $\hat{c}_w$  satisfait la caractérisation de  $c_w$  donnée dans le théorème de Kazhdan et Lusztig. On a déjà observé que  $\hat{c}_w$  vérifie la deuxième condition du théorème :

$$\hat{c}_w = t^{-\ell(w)} \underbrace{\sum_{x \leq w} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim(\mathcal{H}^k \mathcal{IC}(\mathbb{X}_w))_x t^{k + \dim X + \ell(w)} e_x}_{= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim(\mathcal{H}^{k - \ell(w)} \mathcal{IC}(X_w))_x t^k = \hat{Q}_{x,w}(t)}$$

et on avait observé que  $\deg \hat{Q}_{x,w}(t) \leq \ell(w) - \ell(x) - 1$ .

Il reste à montrer que la première condition :  $i(\hat{c}_w) = \hat{c}_w$ . On raisonne par récurrence sur  $\ell(w)$ .

On utilise l'application propre  $\pi : Y \rightarrow \mathbb{X}_w$ . Par le théorème de décomposition :

$$R\pi_* \mathcal{IC}(Y) = \bigoplus_{x \leq w} \mathcal{IC}(\mathbb{X}_x) \otimes_{\mathbb{Q}} V_x$$

somme directe d'objets simples constructibles pour notre stratification (complexes d'intersections des  $G$ -orbites, à support dans  $\mathbb{X}_w$ ) avec des espaces de multiplicité gradués  $V_x = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} V_x^j$  (où chaque  $V_x^j$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel).

Comme la restriction de  $\pi$  au dessus de l'orbite  $\mathbb{O}_w$  est un isomorphisme, on a  $V_w = \mathbb{Q}[0]$  :

$$R\pi_* \mathcal{IC}(Y) = \mathcal{IC}(\mathbb{X}_w) \oplus \bigoplus_{x < w} \mathcal{IC}(\mathbb{X}_x) \otimes_{\mathbb{Q}} V_x.$$

En prenant l'image par  $h$  et en multipliant par  $t^{\dim X}$ , cela entraîne :

$$(**) \quad t^{\dim X} h(R\pi_* \mathcal{IC}(Y)) = \underbrace{t^{\dim X} h(\mathcal{IC}(\mathbb{X}_w))}_{=\hat{c}_w} + \sum_{x < w} \underbrace{t^{\dim X} h(\mathcal{IC}(\mathbb{X}_x))}_{=\hat{c}_x} \cdot \sum_j \dim V_x^j t^j.$$

Observons qu'en dehors de  $\hat{c}_w$  chaque terme et facteur qui apparaît dans cette formule est  $i$ -invariant :

- Par hypothèse de récurrence on a  $\hat{c}_x = c_x$  pour tout  $x < w$ , donc en particulier  $i(\hat{c}_x) = \hat{c}_x$ .
- D'autre part comme  $\pi$  est propre le complexe  $R\pi_* \mathcal{IC}(Y)$  est auto-dual pour la dualité de Verdier. Cela entraîne  $\dim V_x^j = \dim V_x^{-j}$  pour tout  $j$ , en d'autres termes le polynôme de Laurent  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} V_x^j t^j$  est  $i$ -invariant.
- Enfin comme  $Y$  est lisse on a  $\mathcal{IC}(Y) = \mathbb{Q}[-\dim Y] = \mathbb{Q}[-\dim X - \ell(w)]$ . D'après le lemme de la section précédente, on sait que

$$h(R\pi_* \mathbb{Q}) = (1 + e_{s_1}) \cdots (1 + e_{s_{\ell(w)}})$$

donc

$$h(R\pi_* \mathcal{IC}(Y)) = h(R\pi_* \mathbb{Q}[-\dim X - \ell(w)]) = t^{-\dim X - \ell(w)} (1 + e_{s_1}) \cdots (1 + e_{s_{\ell(w)}})$$

d'où

$$t^{\dim X} h(R\pi_* \mathcal{IC}(Y)) = t^{-1} (1 + e_{s_1}) \cdots t^{-1} (1 + e_{s_r}) = c_{s_1} \cdots c_{s_r}.$$

En particulier  $t^{\dim X} h(R\pi_* \mathcal{IC}(Y))$  est  $i$ -invariant.

La formule (\*\*) permet donc de conclure que  $\hat{c}_w$  est lui-même  $i$ -invariant. Cela complète la démonstration.

## RÉFÉRENCES

- [1] D. Kazhdan et G. Lusztig : Schubert varieties and Poincaré duality. Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979), pp. 185–203, Proc. Sympos. Pure Math., XXXVI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.
- [2] T.A. Springer : Quelques applications de la cohomologie d'intersection. Séminaire Bourbaki, Vol. 1981/1982, pp. 249–273, Astérisque, 92–93, Soc. Math. France, Paris, 1982.