DM sur les sous-groupes de Sylow

A rendre pour le 29/11/2024

Le but de ce devoir maison est de démontrer directement et d'illustrer les trois théorèmes de Sylow dans le cas où le groupe est le groupe linéaire sur le corps fini $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On convient donc qu'il est possible d'utiliser tous les résultats des chapitres 1,2,3, mais pas du chapitre 4. Les exercices sont indépendants excepté le fait que l'exercice 3 utilise le concept d'espace vectoriel quotient (défini dans l'exercice 1). Les exercices 2 et 4 sont les plus accessibles.

Exercice 1. (Espaces vectoriels quotients)
Soit k un corps, E un espace vectoriel sur k, et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. La somme dans E est notée $+$ et la multiplication par un scalaire est notée $\cdot$. On rappelle que parmi les axiomes définissant un espace vectoriel, il y a le fait que $(E, +)$ est un groupe abélien.

1. Montrer que $F \subset E$ est un sous-groupe de $(E, +)$ et qu'il est distingué.
2. Montrer que $+$ induit une structure de groupe $(E/F, +)$ et rappeler comment cette structure est définie.
3. On définit une opération externe $k \times E/F \to E/F$ par $\lambda * \alpha = \overline{\lambda \cdot x}$ si $x \in \alpha$. Montrer que ceci est bien défini (ne dépend pas de $x \in \alpha$).
4. Montrer que pour tout $\lambda, \mu \in k$, pour tout $\alpha, \beta \in E/F$, on a :

$$\begin{cases} 1 * \alpha = \alpha \\ \lambda * (\mu * \alpha) = (\lambda\mu) * \alpha \\ (\lambda + \mu) * \alpha = \lambda * \alpha + \mu * \alpha \\ \lambda * (\alpha + \beta) = \lambda * \alpha + \lambda * \beta \end{cases} \tag{1}$$

   Autrement dit, $(E/F, +, *)$ est un espace vectoriel sur k.

Exercice 2. (Premier théorème de Sylow) Soit p un nombre premier.

1. Rappeler la définition d'un corps et montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps qu'on notera aussi $\mathbb{F}_p$. Puisque $\mathbb{F}_p$ est un corps, on peut parler du groupe des matrices inversibles à coefficients dans ce corps, qu'on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ ou plus simplement G. On admet (résultat montré dans le cours) que G est de cardinal $p^{n(n-1)/2}(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1)$.
2. Soit S l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})$ avec $m_{ii} = 1$ et $m_{ij} = 0$ si $i > j$. Montrer que S est un sous-groupe de G.

3. Montrer que $|S| = p^{n(n-1)/2}$ et que donc S est un p-sous-groupe de Sylow de G. On a donc vérifié le premier théorème de Sylow pour cet exemple.

Exercice 3. (Deuxième théorème de Sylow)

1. Soit S' un autre p-sous-groupe de Sylow. On fait agir G sur $\mathbb{F}_p^n$. Montrer que $|Fix(S')|$ est congru à $|\mathbb{F}_p^n|$, donc à 0, modulo p.
2. Montrer que $Fix(S')$ contient le vecteur nul.
3. En déduire que $Fix(S')$ contient un vecteur non nul, qu'on notera x_1.
4. Montrer que S' préserve le sous-espace vectoriel $\mathbb{F}_p \cdot x_1$, et que donc il agit sur le quotient $E/\mathbb{F}_p \cdot x_1$.
5. Comme dans la question 3, montrer qu'il existe un vecteur u_2 dans le quotient $\mathbb{F}_p^n/\mathbb{F}_p \cdot x_1$ non nul et fixé par S'.
6. Soit $x_2 \in \mathbb{F}_p^n$ un représentant de u_2 (ie tel que $[x_2] = u_2$ dans $\mathbb{F}_p^n/\mathbb{F}_p \cdot x_1$). Montrer que pour tout $M \in S'$, il existe un scalaire $a_{1,2}$ tel que $M \cdot x_2 = x_2 + a_{1,2}x_1$.
7. Par récurrence, construire une famille libre de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que pour tout $M \in S'$ il existe des scalaires $a_{i,j}$ pour $1 \leq i < j \leq n$ tels que :
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \ , \ M \cdot x_j = x_j + \sum_{i<j} a_{i,j} x_j.$$
8. Soit P la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{F}_p^n$ à la base $(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer que $P^{-1}S'P \subset S$.
9. En déduire que $P^{-1}S'P = S$. On a donc montré (une partie) du deuxième théorème de Sylow pour cet exemple : tous les p-sous-groupes de Sylow sont conjugués.

Exercice 4. (Troisième théorème de Sylow)
Etant donné $P \in G$, on note S_P le p-sous-groupe de Sylow PSP^{-1}. Le dernier point de l'exercice précédent montre que tous les p-sous-groupes de Sylow sont de la forme S_P. On note $B \subset G$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles.

1. Soit $A \in B$. Montrer que $ASA^{-1} = S$. On admet le résultat réciproque : si $A \in G$ est telle que $ASA^{-1} = S$, alors $A \in B$.
2. Soit $P, Q \in G$. Montrer que $S_P = S_Q$ si et seulement si il existe $A \in B$ telle que $P = QA$.
3. Montrer que $|B| = (p-1)^n p^{n(n-1)/2}$.
4. Soit n_p ne nombre de p-sous-groupes de Sylow de G. Montrer que
$$n_p = 1(1+p)\cdots(1+p+\cdots+p^{n-1}).$$
5. Si on écrit $|G| = p^{n(n-1)/2}m$ comme dans le cours, montrer que n_p est congru à 1 modulo p et que $n_p|m$, à savoir la conclusion du troisième théorème de Sylow pour cet exemple.