
GROUPE DE PERMUTATIONS GROUPE SYMÉTRIQUE

Chapitre 4

Ce polycopié est très largement inspiré du polycopié utilisé par mon prédécesseur K. Koufany, que je remercie pour son travail de rédaction.

Table des matières

1. Permutations, cycles et transpositions.....	1
2. Les groupes symétriques.....	5
3. Support et orbites d'une permutation.....	6
4. Systèmes de générateurs de $\mathfrak{S}(E)$	8
5. Signature d'une permutation.....	13
6. Le groupe alterné.....	16

Soit E un ensemble ayant au moins deux éléments et Id_E l'application identité sur E . On notera $\text{card}(E)$ le cardinal de E .

1. Permutations, cycles et transpositions

On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E sur E .

Proposition 1.1. — $\mathfrak{S}(E)$ est un groupe pour la composition des applications.

Démonstration. — Evident. □

Définition 1.2. — Le groupe $\mathfrak{S}(E)$ est appelé **groupe des permutations** de E .

Dans le cas où E est réduit à un élément, $\mathfrak{S}(E) = \{Id\}$.

Pour $E = \{1, 2, \dots, n\}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathfrak{S}_n le groupe $\mathfrak{S}(E)$ et on l'appelle **groupe symétrique** de degré n .

Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

pour signifier que σ est la bijection $\sigma : k \mapsto \sigma(k)$.

Avec cette notation, on calcule facilement la composée et l'inverse d'une permutation de \mathfrak{S}_n . Par exemple, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$ et tout entier relatif r , on définit la permutation σ^r par

$$\sigma^r = \begin{cases} Id_E & \text{si } r = 0 \\ \sigma \circ \cdots \circ \sigma & (r \text{ fois}) \text{ si } r \geq 1 \\ (\sigma^{-r})^{-1} & \text{si } r \leq -1 \end{cases}$$

Définition 1.3. — Soit r un entier, $2 \leq r \leq \text{card}(E)$. On appelle **cycle** d'ordre r (ou r -cycle), toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$ qui permute circulairement r éléments de E et laisse fixe les autres. C'est-à-dire, qu'il existe un r -uplet (x_1, \dots, x_r) de E tel que

$$\begin{cases} \sigma(x_k) = x_{k+1} & \forall k \in \{1, \dots, r-1\} \\ \sigma(x_r) = x_1 \\ \sigma(x) = x & \forall x \in E \setminus \{x_1, \dots, x_r\}. \end{cases}$$

On notera alors

$$\sigma = (x_1, \dots, x_r)$$

un tel cycle et on dit que $\{x_1, \dots, x_r\}$ est le **support** de σ , que l'on note $\text{Supp}(\sigma)$.

Remarque 1.4. — (a) Les r permutations circulaires

$$(x_1, x_2, \dots, x_r), (x_2, x_3, \dots, x_r, x_1), \dots, (x_r, x_1, \dots, x_{r-1})$$

désignent le même cycle.

(b) L'inverse d'un r -cycle est un r -cycle de même support. Précisément, on peut vérifier facilement que

$$(x_1, x_2, \dots, x_r)^{-1} = (x_r, x_{r-1}, \dots, x_1).$$

(c) Si $\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ est un r -cycle, on a alors pour tout entier k , $1 \leq k \leq r$,

$$x_k = \sigma^{k-1}(x_1).$$

En effet, c'est vrai pour $k = 1$ et supposons le résultat acquis pour $1 \leq k-1 \leq r-1$, on a

$$x_k = \sigma(x_{k-1}) = \sigma(\sigma^{k-2}(x_1)) = \sigma^{k-1}(x_1).$$

Définition 1.5. — On appelle *transposition*, un cycle d'ordre 2.

On peut remarquer qu'une transposition τ est d'ordre 2 dans le groupe $\mathfrak{S}(E)$, c'est-à-dire que $\tau \neq Id_E$ et $\tau^2 = Id_E$. On a donc $\tau^{-1} = \tau$.

Proposition 1.6. — Un r -cycle est d'ordre r dans le groupe $\mathfrak{S}(E)$.

Démonstration. — Soit $\sigma = (x_1, \dots, x_r)$ un r -cycle avec $r \geq 2$. Pour tout entier k , $1 \leq k \leq r$ on a

$$\begin{aligned} \sigma^r(x_k) &= \sigma^r(\sigma^{k-1}(x_1)) = \sigma^{k-1}(\sigma^r(x_1)) \\ &= \sigma^{k-1}(\sigma(\sigma^{r-1}(x_1))) = \sigma^{k-1}(\sigma(x_r)) \\ &= \sigma^{k-1}(x_1) = x_k \end{aligned}$$

Comme $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in E \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$, on en déduit que $\sigma^r = Id_E$. Enfin puisque $\sigma^{k-1}(x_1) = x_k \neq x_1$ pour $2 \leq k \leq r$, on déduit que $\sigma^{k-1} \neq Id_E$ et σ est d'ordre r . \square

Remarque 1.7. — (a) Si l'ensemble E a au moins 3 éléments, alors le groupe $\mathfrak{S}(E)$ n'est pas commutatif. En effet, soient x_1, x_2, x_3 trois éléments distincts de E et $\tau_1 = (x_1, x_2)$, $\tau_2 = (x_2, x_3)$. On a $\tau_2\tau_1(x_1) = x_3$ et $\tau_1\tau_2(x_1) = x_2$. Donc $\tau_1\tau_2 \neq \tau_2\tau_1$.

(b) On suppose que $\text{card}(E) \geq 2$. Alors on vérifie assez facilement que dans $\mathfrak{S}(E)$ il y a $\binom{n}{r} (r-1)! = \frac{n!}{(n-r)!r}$ cycles d'ordre r distincts.

Proposition 1.8. — Si σ et σ' sont deux cycles tels que $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\sigma')$ est réduit à un point, alors $\sigma\sigma'$ est un cycle.

Démonstration. — En effet, supposons que $\sigma = (x_1, \dots, x_r)$, $\sigma' = (x'_1, \dots, x'_s)$ et $\text{Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\sigma') = \{x_k\}$. Soit j , $1 \leq j \leq s$ tel que $x_k = x'_j$, alors

$$\begin{aligned} \sigma\sigma' &= (x_{k+1}, \dots, x_r, x_1, \dots, x_k)(x_k, x'_{j+1}, \dots, x'_s, x'_1, \dots, x'_{j-1}) \\ &= (x_{k+1}, \dots, x_r, x_1, \dots, x_k, x'_{j+1}, \dots, x'_s, x'_1, \dots, x'_{j-1}) \end{aligned}$$

\square

La proposition qui suit est très souvent utilisée.

Proposition 1.9. — Soit r un entier $2 \leq r \leq \text{card}(E)$.

Le conjugué dans $\mathfrak{S}(E)$ d'un r -cycle est encore un r -cycle. Précisément, pour tout r -cycle $\sigma = (x_1, \dots, x_r)$ et toute permutation $\gamma \in \mathfrak{S}(E)$, on a

$$\gamma \circ \sigma \circ \gamma^{-1} = (\gamma(x_1), \gamma(x_2), \dots, \gamma(x_r)).$$

Réciproquement, deux cycles de même longueur sont conjugués dans $\mathfrak{S}(E)$. Précisément, si σ, σ' sont deux r -cycles, il existe alors une permutation $\gamma \in \mathfrak{S}(E)$ telle que $\sigma' = \gamma \circ \sigma \circ \gamma^{-1}$.

Démonstration. — En notant $\sigma'' = (\gamma(x_1), \dots, \gamma(x_r))$, il s'agit de montrer que $\gamma \circ \sigma = \sigma'' \circ \gamma$.

Pour $x \in E \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$, on a $\sigma(x) = x$ et $\gamma(x) \in E \setminus \{\gamma(x_1), \dots, \gamma(x_r)\}$, ce qui donne

$$\gamma \circ \sigma(x) = \gamma(x) = \sigma''(\gamma(x)) = \sigma'' \circ \gamma(x).$$

Si $x = x_k \in \{x_1, \dots, x_r\}$, en notant $x_{r+1} = x_1$, on a

$$\gamma \circ \sigma(x) = \gamma(\sigma(x_k)) = \gamma(x_{k+1})$$

et

$$\sigma'' \circ \gamma(x) = \sigma''(\gamma(x_k)) = \gamma(x_{k+1}).$$

On a donc bien $\gamma \circ \sigma = \sigma'' \circ \gamma$, soit $\gamma \circ \sigma \circ \gamma^{-1} = \sigma''$.

Pour la réciproque, soient $\sigma = (x_1, \dots, x_r)$ et $\sigma' = (x'_1, \dots, x'_r)$ deux r -cycles. Soit φ une bijection de $E \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$ sur $E \setminus \{x'_1, \dots, x'_r\}$ et $\gamma \in \mathfrak{S}(E)$ telle que $\gamma(x_k) = x'_k$ pour $k = 1, \dots, r$ et $\gamma(x) = \varphi(x)$ pour $x \in E \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$. On a alors

$$\gamma \circ \sigma \circ \gamma^{-1} = (\gamma(x_1), \dots, \gamma(x_r)) = (x'_1, \dots, x'_r) = \sigma'.$$

□

Le résultat précédent se traduit en disant que, pour tout entier r compris entre 2 et $\text{card}(E)$, le groupe $\mathfrak{S}(E)$ agit par conjugaisons de façon transitive sur l'ensemble des r -cycles.

On désigne par $Z(\mathfrak{S}(E))$ le centre du groupe de $\mathfrak{S}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}(E)$ qui commutent à tous les autres éléments de $\mathfrak{S}(E)$.

Proposition 1.10. — On a

$$Z(\mathfrak{S}(E)) = \begin{cases} \mathfrak{S}(E) & \text{si } \text{card}(E) = 2 \\ \{Id_E\} & \text{si } \text{card}(E) \geq 3 \end{cases}$$

Démonstration. — Si $\text{card}(E) = 2$, le groupe $\mathfrak{S}(E)$ est abélien et $Z(\mathfrak{S}(E)) = \mathfrak{S}(E)$.

On suppose que $\text{card}(E) \geq 3$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(E) \setminus \{Id_E\}$. Il existe donc $x \in E$

tel que $y = \sigma(x) \neq x$. Soit $z \in E \setminus \{x, y\}$ (E a au moins trois éléments) et τ la transposition $\tau = (y, z)$. On a

$$\sigma\tau(x) = \sigma(x) = y \text{ et } \tau\sigma(x) = \tau(y) = z \neq y.$$

On en déduit que $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ et que $\sigma \notin Z(\mathfrak{S}(E))$. Par conséquent $Z(\mathfrak{S}(E)) = \{Id_E\}$. \square

2. Les groupes symétriques

Théorème 2.1. — *Si E et F sont deux ensembles non vides et φ une bijection de E sur F , alors les groupes $\mathfrak{S}(E)$ et $\mathfrak{S}(F)$ sont isomorphes.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \Psi: \mathfrak{S}(E) &\rightarrow \mathfrak{S}(F) \\ \sigma &\mapsto \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes. \square

On en déduit que tout groupe de permutations d'un ensemble à n éléments est isomorphe au groupe symétrique \mathfrak{S}_n des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Théorème 2.2. — *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout ensemble de cardinal n , le groupe $\mathfrak{S}(E)$ est d'ordre $n!$.*

Démonstration. — On va faire une démonstration par récurrence sur le cardinal $n \geq 1$ de E .

Si $n = 1$, $\mathfrak{S}(E) = \{Id_E\}$, est de cardinal 1.

Supposons le résultat acquis pour les ensembles à $n - 1$ éléments et soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble $n \geq 2$ éléments.

On fait agir $\mathfrak{S}(E)$ sur E . Cette action est transitive (il y a une seule orbite) et on désigne par $H = \mathfrak{S}(E)_{x_n}$ le stabilisateur de x_n ,

$$H = \{\sigma \in \mathfrak{S}(E) ; \sigma(x_n) = x_n\}.$$

H est donc un sous-groupe de $\mathfrak{S}(E)$ et l'application qui associe à $\sigma \in H$ sa restriction à $F = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ réalise alors un isomorphisme de groupes de H sur $\mathfrak{S}(F)$, donc H est d'ordre $(n - 1)!$. Soit \mathcal{O}_{x_n} l'orbite de x_n . Comme l'action est transitive on a $\mathcal{O}_{x_n} = E$, donc

$$\begin{aligned} \text{card}(\mathfrak{S}(E)) &= \text{card}(\mathcal{O}_{x_n})\text{card}(H) \\ &= n \cdot (n - 1)! = n! \end{aligned}$$

\square

Exemples 2.3. — (a) Le groupe symétrique \mathfrak{S}_2 est composé de deux éléments

$$Id, \tau = (1, 2)$$

C'est un groupe abélien. Il est cyclique d'ordre 2 engendré par τ et isomorphe \mathbb{Z}_2 .

(b) Le groupe symétrique \mathfrak{S}_2 est formé de six éléments

$$Id, \tau_1 = (1, 2), \tau_2 = (1, 3), \tau_3 = (2, 3), \sigma_1 = (1, 2, 3) \text{ et } \sigma_2 = (1, 3, 2).$$

Ce groupe n'est pas abélien, car par exemple

$$\tau_1 \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma_2 \text{ et } \tau_2 \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_1 \neq \sigma_2.$$

En remarquant que

$$\sigma_2 = \sigma_1^2, \tau_2 = \tau_1 \sigma_2 = \tau_1 \sigma_1^2, \tau_3 = \tau_1 \sigma_1$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_3 &= \{Id, \sigma_1, \sigma_1^2, \tau_1, \tau_1 \sigma_1, \tau_1 \sigma_1^2\} = \langle \tau_1, \sigma_1 \rangle \\ &= \{\tau_1^i \sigma_1^j \mid i = 0, 1, j = 0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

\mathfrak{S}_3 est donc engendré par τ_1 (qui est d'ordre 2) et σ_1 (qui est d'ordre 3). On montre que \mathfrak{S}_3 est, à isomorphisme près, le seul groupe d'ordre 6 non abélien (voir TD).

3. Support et orbites d'une permutation

Définition 3.1. — *Le support d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$ est le complémentaire dans E de l'ensemble de ses points fixes, soit l'ensemble*

$$\text{supp}(\sigma) = \{x \in E \mid \sigma(x) \neq x\}.$$

Remarque 3.2. — (a) Id_E est l'unique permutation de support vide.

(b) Le support d'un cycle $\sigma = (x_1, \dots, x_r)$ est $\{x_1, \dots, x_r\}$.

Proposition 3.3. — *Soient σ, σ' deux permutations de E .*

(a) $\sigma(\text{supp}(\sigma)) = \text{supp}(\sigma)$.

(b) $\text{supp}(\sigma) = \text{supp}(\sigma^{-1})$.

(c) Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\text{supp}(\sigma^m) \subset \text{supp}(\sigma)$.

(d) Si $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\sigma') = \emptyset$, alors $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$.

Démonstration. — (a) Soit $x \in \text{supp}(\sigma)$. Comme σ est injective, de $\sigma(x) \neq x$ on déduit $\sigma(\sigma(x)) \neq \sigma(x)$ et $\sigma(x) \in \text{supp}(\sigma)$. On a donc $\sigma(\text{supp}(\sigma)) \subset \text{supp}(\sigma)$. Comme σ est bijective, ces ensembles ont même cardinal, on a donc égalité.

(b) De $\sigma(x) = x \iff x = \sigma^{-1}(x)$, on déduit que $\text{supp}(\sigma) = \text{supp}(\sigma^{-1})$.

(c) L'égalité $\sigma(x) = x$ entraîne $\sigma^m(x) = x$, donc $\sigma^m(x) \neq x$ entraîne $\sigma(x) \neq x$ et $\text{supp}(\sigma^m) \subset \text{supp}(\sigma)$.

(d) Soient σ, σ' tel que $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\sigma') = \emptyset$ et $x \in E$.

Si $x \notin \text{supp}(\sigma) \cup \text{supp}(\sigma')$, alors $\sigma(x) = x = \sigma'(x)$ et $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma'(x) = x = \sigma(x) = \sigma \circ \sigma'(x)$.

Si $x \in \text{supp}(\sigma)$ (et donc $x \notin \text{supp}(\sigma')$), alors $\sigma'(x) = x$, donc $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma(x) = \sigma \circ \sigma'(x)$. On montre de même que pour tout $x \in \text{supp}(\sigma')$, $\sigma' \circ \sigma(x) = \sigma'(x) = \sigma \circ \sigma'(x)$. Ainsi $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$. \square

Pour la suite de ce paragraphe, E est un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$. On a une action naturelle du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ sur E définie par

$$k \cdot x = \sigma^k(x).$$

Les orbites, appelées encore σ -orbites pour cette action, sont les parties de E

$$\mathbb{Z} \cdot x = \{\sigma^k(x) ; k \in \mathbb{Z}\}, \text{ avec } x \in E.$$

On notera $Orb_\sigma(x)$ une telle orbite.

On rappelle que les orbites sont aussi les classes d'équivalences pour la relation d'équivalence définie sur E par

$$x \mathcal{R}_\sigma y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = \sigma^k(x)$$

et que les orbites deux à deux distinctes forment une partition de E .

Remarque 3.4. — Une σ -orbite $Orb_\sigma(x)$ est réduite à un point si, et seulement si, $\sigma(x) = x$ et les orbites non réduites à un point forment une partition du support de σ .

Exemple 3.5. — Soit la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. Les σ -orbites sont $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{6, 7\}$ et $\{8\}$.

Remarque 3.6. — La réciproque du point (d) de la proposition précédente est fautive. Pour le voir, il suffit de prendre $\sigma \neq Id$ et $\sigma' = \sigma^{-1}$.

Remarque 3.7. — Soit $x \in \{1, \dots, n\}$ et s un entier naturel strictement positif tel que $\sigma^s(x) = x$. Alors $Orb_\sigma(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{s-1}(x)\}$. Si de plus s est le plus petit tel entier, alors les éléments $x, \sigma(x), \dots, \sigma^{s-1}(x)$ sont distincts et donc $Orb_\sigma(x)$ est de cardinal s .

Démonstration. — Soit $k \in \mathbb{Z}$. En effectuant la division euclidienne de k par s , on peut écrire $k = qs + j$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq j \leq s - 1$, ce qui donne

$$\sigma^k(x) = \sigma^j(x)$$

et $Orb_\sigma(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{s-1}(x)\}$.

S'il existe $i \neq j$ tels que $0 \leq i, j \leq s - 1$ et $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$, on peut supposer $i < j$. On a alors $\sigma^{j-i}(x) = x$, de sorte que s n'est pas le plus petit entier strictement positif k tel que $\sigma^k(x) = x$. \square

Exemple 3.8. — Soit $\sigma = (x_1, \dots, x_r)$ un r -cycle.

Pour $x \in E \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$, on a $\sigma(x) = x$ et $Orb_\sigma(x) = \{x\}$.

Pour tout entier $1 \leq k \leq r$, on a $x_k = \sigma^{k-1}(x_1)$, donc $x_k \mathcal{R}_\sigma x_1$ et comme $\sigma^r(x_1) = x_1$, on a d'après la Remarque 3.6

$$\begin{aligned} \text{Orb}_\sigma(x_k) &= \text{Orb}_\sigma(x_1) = \{x_1, \sigma(x_1), \dots, \sigma^{r-1}(x_1)\} \\ &= \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \end{aligned}$$

Il y a donc une seule orbite non réduite à un point. Nous verrons plus loin que cela caractérise les cycles.

Lemme 3.9. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$ et \mathcal{O} une σ -orbite. Soit $r = |\mathcal{O}|$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{O}$, r est le plus petit entier naturel non nul tel que $\sigma^k(x) = x$, et

$$\mathcal{O} = \text{Orb}_\sigma(x) = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{r-1}(x)\}.$$

Démonstration. — Soit $x \in \mathcal{O}$. Comme deux orbites sont soit disjointes soit égales, on a $\mathcal{O} = \text{Orb}_\sigma(x)$. Puisque E est fini, l'application $\mathbb{Z} \rightarrow E$ qui envoie i sur $\sigma^i(x)$ ne peut pas être injective : soit donc i, j des entiers avec $i < j$ et $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$. On a alors $\sigma^{j-i}(x) = x$ avec $j - i > 0$ et l'ensemble des entiers k de l'énoncé est non vide.

Il existe donc un plus petit entier naturel non nul s tel que $\sigma^s(x) = x$. Par la Remarque 3.6, $\mathcal{O} = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{s-1}(x)\}$ et $\text{card}(\mathcal{O}) = s$. Ainsi $s = r$. \square

Proposition 3.10. — Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$ est un cycle d'ordre $r \geq 2$ si, et seulement si, il n'y a qu'une seule σ -orbite non réduite à un point.

Démonstration. — On a déjà vu qu'un r -cycle a une seule orbite non réduite à un point.

Réciproquement si σ a une seule orbite non réduite à un point,

$$\mathcal{O} = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{r-1}(x)\} = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$$

avec $r \geq 2$, on a alors

$$\begin{cases} \sigma(x_k) = x_{k+1} & (1 \leq k \leq r-1) \\ \sigma(x_r) = x_1 & \text{par la Remarque 3.6} \\ \sigma(x) = x & \text{si } x \in E \setminus \{x_1, \dots, x_r\} \end{cases}$$

et σ est le r -cycle (x_1, \dots, x_r) . \square

Remarque 3.11. — (a) On peut déduire de cette proposition qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$ est un cycle d'ordre $r \geq 2$ si, et seulement si, il existe $x \in E$ tel que $\text{Orb}_\sigma(x) = \text{supp}(\sigma)$.

(b) La composée de deux cycles n'est pas en général un cycle. Par exemple pour $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ dans \mathfrak{S}_4 . On a $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ avec $\text{Orb}_{\sigma^2}(1) = \{1, 3\}$, $\text{Orb}_{\sigma^2}(2) = \{2, 4\}$, et donc σ^2 n'est pas un cycle.

4. Systèmes de générateurs de $\mathfrak{S}(E)$

Dans ce paragraphe E est un ensemble fini de cardinal $n \geq 2$.

Définition 4.1. — On dit que deux cycles σ et σ' dans $\mathfrak{S}(E)$ sont disjoints si leurs supports sont disjoints dans E .

En utilisant le fait que les σ -orbites forment une partition de E et que chaque σ -orbite non réduite à un point permet de définir un cycle, on obtient le résultat suivant qui nous donne un premier système de générateurs de $\mathfrak{S}(E)$.

Théorème 4.2. — Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(E) \setminus \{Id\}$ se décompose en produit de cycles deux à deux disjoints (le groupe $\mathfrak{S}(E)$ est engendré par les cycles). Cette décomposition est unique à l'ordre près.

Si $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_p$ est une telle décomposition, alors chaque sous-ensemble $\text{supp}(\gamma_i)$ est une σ -orbite et toutes les σ -orbites sont obtenues ainsi. On a donc la partition

$$\text{supp}(\sigma) = \coprod_{k=1}^p \text{supp}(\gamma_k).$$

De plus, $o(\sigma) = \text{ppcm}(o(\gamma_1), \dots, o(\gamma_p))$.

Démonstration. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(E) \setminus \{Id\}$ et soit $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_p, \mathcal{O}_{p+1}, \dots, \mathcal{O}_r$ les σ -orbites deux à deux distinctes avec $r_k = \text{card}\mathcal{O}_k \geq 2$ pour $k = 1, \dots, p$ et $\text{card}\mathcal{O}_k = 1$ pour $k = p+1, \dots, r$ (s'il en existe). On a alors la partition $E = \cup_{k=1}^r \mathcal{O}_k$.

Pour tout entier $1 \leq k \leq r$, on désigne par γ_k la permutation de E définie par

$$\forall x \in E, \quad \gamma_k(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \mathcal{O}_k \\ x & \text{si } x \notin \mathcal{O}_k \end{cases}$$

(γ_k est bien une permutation de E car la restriction de σ à une orbite \mathcal{O}_k est une permutation de \mathcal{O}_k). Si \mathcal{O}_k est réduite à un point, alors $\gamma_k = Id_E$, sinon γ_k est un r_k -cycle : en effet, pour $x \notin \mathcal{O}_k$, on a $\gamma_k(x) = x$ et $\text{Orb}_{\gamma_k}(x) = \{x\}$ et pour $x \in \mathcal{O}_k$, on a

$$\begin{aligned} \text{Orb}_{\gamma_k}(x) &= \{\gamma_k^j(x) \mid j \in \mathbb{Z}\} = \{\sigma^j(x) \mid j \in \mathbb{Z}\} \\ &= \text{Orb}_{\sigma}(x) = \mathcal{O}_k \end{aligned}$$

donc γ_k a bien une seule orbite non réduite à un point.

On vérifie alors que $\sigma = \prod_{j=1}^r \gamma_j = \prod_{j=1}^p \gamma_j$. En effet, pour $x \in E$, il existe un unique indice k entre 1 et r tel que $x \in \mathcal{O}_k$ et on a $\gamma_k(x) = \sigma(x)$, $\gamma_j(x) = x$ pour $j \neq k$ (puisque $x \notin \mathcal{O}_j$) et tenant compte du fait que les γ_j commutent (les supports sont deux à deux disjoints), on en déduit que

$$\left(\prod_{j=1}^r \gamma_j \right) (x) = \left(\gamma_k \prod_{j=1, j \neq k}^r \gamma_j \right) (x) = \gamma_k(x) = \sigma(x).$$

Il reste à montrer l'unicité, à l'ordre près, d'une telle permutation.

Soit $\sigma = \prod_{j=1}^{p'} \gamma_j'$ une autre décomposition en cycles deux à deux disjoints. En notant $\mathcal{O}'_1, \dots, \mathcal{O}'_{p'}$ les supports de ces cycles, pour $1 \leq k \leq p'$ et $x \in \mathcal{O}'_k$, on a $\sigma(x) = \gamma_k'(x)$ ($x \notin \mathcal{O}'_j$ pour $j \neq k$ et les cycles commutent), donc $\mathcal{O}'_k = \text{Orb}_{\gamma_k'}(x) = \text{Orb}_{\sigma}(x)$.

Les orbites \mathcal{O}'_k sont donc les orbites non réduites à un point de σ et $p' = p$. On a donc $\mathcal{O}'_k = \mathcal{O}_j$ pour un unique j entre 1 et p . Pour $x \in \mathcal{O}'_k$, on a $\gamma_k'(x) = \sigma(x) = \gamma_j(x)$ et pour $x \notin \mathcal{O}'_k$, on a $\gamma_k'(x) = \gamma_j(x)$, ce qui montre que $\gamma_k' = \gamma_j$ et l'unicité de la décomposition à l'ordre près.

La réunion $\cup_{j=1}^p (\gamma_j)$ est la réunion des orbites \mathcal{O}_k non réduites à un point, soit le support de σ .

Notons $m = \text{ppcm}(o(\gamma_1), \dots, o(\gamma_p))$. Comme les cycles γ_k commutent, on a $\sigma^k = \gamma_1^k \circ \dots \circ \gamma_p^k$ pour tout entier naturel k et $\sigma^k = \text{Id}_E$ si et seulement si $\gamma_j^k = \text{Id}$ pour tout $1 \leq j \leq p$. En effet, il est clair que la condition est suffisante et si $\sigma^k = \text{Id}_E$, on a alors pour tout $x \in \mathcal{O}_j$, $\gamma_j^k(x) = \sigma^k(x) = x$ et si $x \notin \mathcal{O}_j$, on a $\sigma_j(x) = x$, donc $\gamma_j^k(x) = x$. Ainsi $\gamma_j^k = \text{Id}_E$. Il en résulte que l'ordre de σ est un multiple commun des ordres des γ_j et donc un multiple de m qui est lui même un multiple de l'ordre de σ puisque $\sigma^m = \text{Id}_E$. D'où l'égalité. \square

Remarque 4.3. — (a) On conviendra que l'identité est produit de 0 cycles : $\text{Id} = \gamma^0$ pour tout cycle γ .

(b) Comme l'ordre d'un cycle est égal à sa longueur, l'ordre de σ est aussi le ppcm des longueurs des cycles γ_j .

Pour $E = \{1, 2, \dots, n\}$, une telle décomposition s'obtient en prenant, dans le cas où il n'est pas un point fixe, les images de 1 par σ, σ^2, \dots , jusqu'au moment où on retombe sur 1 (l'orbite de 1), puis on recommence avec le plus petit entier dans $E \setminus \text{Orb}_{\sigma}(1)$ qui n'est pas fixe et ainsi de suite.

Exemple 4.4. — Soit la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. On a $\sigma(1) = 2$, $\sigma^2(1) = 3$, $\sigma^3(1) = 4$, $\sigma^4(1) = 5$, $\sigma^5(1) = 1$, ce qui donne le premier cycle $\gamma_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$. Puis $\sigma(6) = 7$, $\sigma^2(6) = 6$ d'où le deuxième cycle $\gamma_2 = (6, 7)$. On a donc $\sigma = \gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$ et $o(\sigma) = \text{ppcm}(o(\gamma_1), o(\gamma_2)) = \text{ppcm}(5, 2) = 10$.

La décomposition en produits de cycles permet de décrire les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}(E)$. Introduisons d'abord une définition :

Définition 4.5. — On rappelle qu'une partition est une suite décroissante (au sens large) d'entiers strictement positifs. Etant donnée une permutation σ , on note $\lambda(\sigma)$ la partition qui a autant de parts de longueur i que la décomposition de σ en produit de cycles disjoints a de cycles de longueur i . Par l'unicité dans le Théorème 4.2, $\lambda(\sigma)$ est bien définie. Par exemple, la permutation σ

de l'Exemple 4.4 a pour partition $\lambda(\sigma) = (5, 2)$, puisque σ est le produit d'un 5-cycle et d'un 2-cycle disjoints.

Théorème 4.6. — Soit $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}(E)$. Alors σ et σ' sont conjuguées dans $\mathfrak{S}(E)$ si et seulement si $\lambda(\sigma) = \lambda(\sigma')$.

Démonstration. — On applique tout d'abord le Théorème 4.2 : on écrit que

$$\sigma = \gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_r \text{ et } \sigma' = \gamma'_1 \circ \dots \circ \gamma'_r, \quad (1)$$

avec γ_i un cycle de longueur l_i et γ'_i un cycle de longueur l'_i . Quitte à réordonner ces cycles, on peut supposer qu'ils sont de longueur décroissante, à savoir $l_i \geq l_{i+1}$ et $l'_i \geq l'_{i+1}$. On a alors $\lambda(\sigma) = (l_1, \dots, l_r, 1, \dots, 1)$ et $\lambda(\sigma') = (l'_1, \dots, l'_r, 1, \dots, 1)$ (avec autant de 1 qu'il faut pour obtenir que la somme des parts des partitions est égale à n).

On a alors, pour $\varphi \in \mathfrak{S}(E)$,

$$\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ \gamma_1 \circ \varphi^{-1}) \circ \dots \circ (\varphi \circ \gamma_r \circ \varphi^{-1}).$$

Puisque les $\varphi \circ \gamma_i \circ \varphi^{-1}$ sont des cycles disjoints, ceci est la décomposition en produit de cycles disjoints de $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$, de sorte que $\lambda(\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}) = \lambda(\sigma)$. Ceci fournit une implication de l'énoncé.

Pour l'autre implication, on suppose que $\lambda(\sigma) = \lambda(\sigma')$. Alors, dans l'écriture (1), on a $l_i = l'_i$ pour tout i . Si on écrit $\gamma_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,l_i})$ et $\gamma'_i = (x'_{i,1}, \dots, x'_{i,l_i})$, alors on peut définir une permutation φ qui envoie chaque $x_{i,j}$ sur $x'_{i,j}$, comme dans la preuve de la Proposition 1.9. On a alors pour tout i ,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \gamma_i \circ \varphi^{-1} &= \varphi \circ (x_{i,1}, \dots, x_{i,l_i}) \circ \varphi^{-1} \\ &= (\varphi(x_{i,1}), \dots, \varphi(x_{i,l_i})) \\ &= (x'_{i,1}, \dots, x'_{i,l_i}) \\ &= \gamma'_i. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} &= (\varphi \circ \gamma_1 \circ \varphi^{-1}) \circ \dots \circ (\varphi \circ \gamma_r \circ \varphi^{-1}) \\ &= \gamma'_1 \circ \dots \circ \gamma'_r = \sigma', \end{aligned}$$

de sorte que σ et σ' sont bien conjuguées. □

Proposition 4.7. — Pour $2 \leq r \leq n$, tout r -cycle dans $\mathfrak{S}(E)$ s'écrit comme produit de $r - 1$ transpositions.

Démonstration. — La proposition résulte de

$$(x_1, x_2, \dots, x_r) = (x_1, x_2)(x_2, x_3) \cdots (x_{r-1}, x_r). \quad (2)$$

□

Théorème 4.8. — Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$ se décompose en produit de transpositions (le groupe $\mathfrak{S}(E)$ est engendré par les transpositions).

Démonstration. — On a $Id = \tau^2$ pour toute transposition τ .

D'après Théorème 4.2 et Proposition 4.7 toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(E) \setminus \{Id\}$ est produit de cycles et un cycle est produit de transpositions. \square

Remarque 4.9. — Dans la décomposition d'une permutation en produit de transpositions, il n'y a pas d'unicité et les transpositions ne commutent pas nécessairement. Par exemple, on a

$$(2, 3) = (1, 2)(1, 3)(1, 2)$$

et

$$(1, 2)(2, 3) = (1, 2, 3) \neq (2, 3)(1, 2) = (3, 2, 1).$$

Si $\text{card}(E) = n$, alors $\mathfrak{S}(E)$ est isomorphe \mathfrak{S}_n , on va se contenter maintenant de décrire des générateurs de \mathfrak{S}_n .

Proposition 4.10. — *Le groupe \mathfrak{S}_n est engendré par les $n-1$ transpositions $(1, k)$ où $2 \leq k \leq n$.*

Démonstration. — Soit (i, j) une transposition avec $1 \leq i \neq j \leq n$. Si $i = 1$ ou $j = 1$, il n'y a rien à faire. Pour $i \neq 1$ et $j \neq 1$ on a

$$(i, j) = (1, i)(1, j)(1, i)^{-1} = (1, i)(1, j)(1, i) \quad (3)$$

Le résultat se déduit alors du Théorème 4.8. \square

Exemple 4.11. — Soit la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} = (1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5)(6, 7)$$

On a

$$\begin{aligned} \sigma &= (1, 2)(1, 2)(1, 3)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(1, 4)(1, 6)(1, 7)(1, 6) \\ &= (1, 3)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(1, 4)(1, 6)(1, 7)(1, 6) \end{aligned}$$

Proposition 4.12. — *Le groupe \mathfrak{S}_n est engendré par les $n-1$ transpositions $(k, k+1)$ où $1 \leq k \leq n-1$.*

Démonstration. — Comme \mathfrak{S}_n est engendré par les transpositions $(1, k)$ où $2 \leq k \leq n$, il suffit d'écrire chaque transposition $(1, k)$ comme produit de transposition du type $(i, i+1)$.

Pour $k = 2$, la transposition $(1, k) = (1, 2)$ est de la forme cherchée. Pour $3 \leq k \leq n$, on a

$$(1, k) = (k-1, k)(1, k-1)(k-1, k)^{-1} = (k-1, k)(1, k-1)(k-1, k) \quad (4)$$

On peut donc démontrer la proposition par récurrence. \square

Proposition 4.13. — *Le groupe \mathfrak{S}_n est engendré par $(1, 2)$ et $(1, 2, \dots, n)$.*

Démonstration. — Comme \mathfrak{S}_n est engendré par les transpositions $(k, k + 1)$ où $1 \leq k \leq n - 1$, il suffit de montrer que chaque transposition $(k, k + 1)$ est dans le sous-groupe G de \mathfrak{S}_n engendré par $\tau = (1, 2)$ et $\gamma = (1, 2, \dots, n)$.

On a $(1, 2) \in G$ et pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} \gamma(1, 2)\gamma^{-1} &= (\gamma(1), \gamma(2)) = (2, 3) \\ \gamma(2, 3)\gamma^{-1} &= (\gamma(2), \gamma(3)) = (3, 4) \\ &\vdots \\ \gamma(n-2, n-1)\gamma^{-1} &= (\gamma(n-2), \gamma(n-1)) = (n-1, n) \end{aligned}$$

soit

$$(k, k + 1) = \gamma^{k-1}(1, 2)(\gamma^{k-1})^{-1} \text{ pour } 1 \leq k \leq n - 1$$

□

5. Signature d'une permutation

Définition 5.1. — Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On dit que le couple (i, j) présente une **inversion pour σ** (ou est une **inversion de σ**) si : $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $I(\sigma)$ l'ensemble des inversions de σ et $\ell(\sigma)$ la longueur de σ ie le nombre d'inversions.

Exemple 5.2. — La permutation identité ne possédant aucune inversion, on a $\ell(\text{Id}) = 0$.

Exemple 5.3. — Considérons $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les couples $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, sont des inversions de σ . En revanche $(3, 4)$ n'est pas une inversion. Donc $\ell(\sigma) = 5$.

Définition 5.4. — On appelle **signature** de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$.

Remarque 5.5. — $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$.

Définition 5.6. — Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit que σ est **paire** si $\varepsilon(\sigma) = 1$ et σ est **impaire** si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Théorème 5.1. — Soient $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$. Alors :

1. $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.
2. $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$.
3. $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

Démonstration. — Notons $\epsilon'(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

1. On commence par une remarque qui sera utilisée à plusieurs endroits dans la preuve. On dit qu'un sous-ensemble $A \subset \{1, \dots, n\}^2$ paramètre

les paires lorsque $\forall (i, j) \in A, i \neq j$, et $\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, on a soit $(i, j) \in A$, soit $(j, i) \in A$. Alors

$$\epsilon'(\sigma) = \prod_{(i,j) \in A} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}. \quad (5)$$

En effet, ceci résulte du fait que $\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$.

2. Remarquons ensuite que :

$$\begin{aligned} \Phi : F_n^2 \setminus \{(i, i) ; i \in F_n\} &\rightarrow F_n^2 \setminus \{(i, i) ; i \in F_n\} \\ (i, j) &\mapsto (\sigma(i), \sigma(j)) \end{aligned}$$

est une bijection. Donc :

$$\prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = 1$$

Or

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} &= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \right) \left(\prod_{1 \leq j < i \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \right) \\ &= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Donc $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \pm 1$. Puisque pour tout $i < j$, $\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$

est négatif s'il y a inversion en (i, j) et positif sinon, le signe de

$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$ est $(-1)^{\ell(\sigma)}$. On en déduit que $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = (-1)^{\ell(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$.

3. Montrons la deuxième assertion.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\sigma \circ \sigma') &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma \circ \sigma'(j) - \sigma \circ \sigma'(i)}{j - i} \\
 &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma \circ \sigma'(j) - \sigma \circ \sigma'(i)}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \frac{\sigma'(j) - \sigma'(i)}{j - i} \\
 &= \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \right) \varepsilon(\sigma') \\
 &= \left(\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ \sigma'(i) < \sigma'(j)}} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} \right) \varepsilon(\sigma'),
 \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de (??) avec $A = \{(i, j) \mid \sigma'(i) < \sigma'(j)\}$.
 Maintenant, l'application

$$\begin{aligned}
 \{(i, j) \mid \sigma'(i) < \sigma'(j)\} &\longrightarrow \{(k, l) \mid k < l\} \\
 (i, j) &\longmapsto (\sigma'(i), \sigma'(j))
 \end{aligned}$$

est une bijection. Donc

$$\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ \sigma'(i) < \sigma'(j)}} \frac{\sigma(\sigma'(j)) - \sigma(\sigma'(i))}{\sigma'(j) - \sigma'(i)} = \prod_{1 \leq k < l \leq n} \frac{\sigma(l) - \sigma(k)}{l - k} = \varepsilon(\sigma).$$

Ceci achève la preuve de l'assertion 2.

4. De 2. on déduit immédiatement que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\varepsilon(id) = \varepsilon(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma^{-1}) = 1$. Donc $\varepsilon(\sigma)$ et $\varepsilon(\sigma^{-1})$ ont même signe et $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

□

Proposition 5.7. — *Un k -cycle est de signature $(-1)^{k-1}$.*

Démonstration. — On démontre ce résultat par généralisations successives :

- Soit d'abord σ la transposition $(i, i + 1)$. Alors la seule inversion de σ est le couple $(i, i + 1)$, de sorte que σ est de signature $(-1)^1 = -1$.
- Soit maintenant σ la transposition $(1, k)$: la formule (4) donne $\varepsilon((1, k)) = (-1) \cdot \varepsilon((1, k - 1)) \cdot (-1)$, et donc par récurrence $\varepsilon((1, k)) = -1$.
- La formule (3) donne maintenant $\varepsilon((i, j)) = (-1)(-1)(-1) = -1$ pour tout couple (i, j) .
- On conclut en toute généralité à l'aide de la formule (2).

□

Théorème 5.8. — *Les seuls morphismes de groupes de $(\mathfrak{S}(E), \circ)$ dans (\mathbb{R}^*, \times) sont l'application constante égale à 1 et la signature ε . La signature étant un morphisme surjectif de $\mathfrak{S}(E)$ sur $\{-1, +1\}$.*

Démonstration. — Par le Théorème 5.1, ε est un morphisme de groupes $(\mathfrak{S}(E), \circ) \rightarrow (\{-1, +1\}, \times)$. Il est surjectif car $\varepsilon(\text{Id}) = +1$ et $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ .

Soit φ un morphisme de groupes de $\mathfrak{S}(E)$ dans \mathbb{R}^* . Si τ_1 et τ_2 sont deux transpositions, il existe une permutation σ telle que $\tau_2 = \sigma\tau_1\sigma^{-1}$ et comme le groupe multiplicatif \mathbb{R}^* est abélien, on a

$$\varphi(\tau_2) = \varphi(\sigma\tau_1\sigma^{-1}) = \varphi(\sigma)\varphi(\tau_1)\varphi(\sigma^{-1}) = \varphi(\sigma)\varphi(\sigma^{-1})\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_1)$$

ce qui veut dire que φ est constant sur les transpositions, avec

$$1 = \varphi(\text{Id}) = \varphi(\tau^2) = (\varphi(\tau))^2$$

pour toute transposition τ . On déduit alors que

$$\begin{cases} \varphi(\tau) = +1, & \forall \tau \text{ transposition} \\ \text{ou} \\ \varphi(\tau) = -1, & \forall \tau \text{ transposition} \end{cases}$$

Dans le premier cas, φ est l'application constante égale à 1, puisque $\mathfrak{S}(E)$ est engendré par les transpositions. Dans le second cas, comme toute permutation σ s'écrit $\sigma = \prod_{k=1}^p \tau_k$ où les τ_k sont des transpositions, on a

$$\varphi(\sigma) = \prod_{k=1}^p \varphi(\tau_k) = (-1)^p = \varepsilon(\sigma).$$

□

Exemple 5.9. — On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\sigma = (1, 5, 4, 3, 2)(6, 7)$$

et $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{5-1}(-1) = -1$.

On peut aussi écrire σ comme produit de transpositions

$$\sigma = (1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5)(6, 7)$$

et donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$ (il y a 5 transpositions dans la décomposition de σ).

Exemple 5.10. — La permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

a 5 inversions, donc $\epsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$

6. Le groupe alterné

Définition 6.1. — On dit d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$ est paire (resp. impaire) si $\epsilon(\sigma) = +1$ (resp. $\epsilon(\sigma) = -1$)

Les cycles de longueur paire (resp. impaire) sont impaires (resp. paires).

Définition 6.2. — Le **groupe alterné** est le sous-ensemble de $\mathfrak{S}(E)$ formé des permutations paires. On le note $\mathcal{A}(E)$.

Pour $E = \{1, \dots, n\}$, on note \mathcal{A}_n le groupe alterné.

Remarque 6.3. — (a) $\mathcal{A}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}(E)$. Cela vient du fait que le groupe alterné $\mathcal{A}(E)$ est le noyau du morphisme ϵ . On a alors $\mathfrak{S}(E)/\mathcal{A}(E) \simeq \{-1, +1\}$ et $\text{card}(\mathcal{A}(E)) = \frac{n!}{2}$. Le sous-groupe $\mathcal{A}(E)$ est donc d'indice 2 dans $\mathfrak{S}(E)$.

(b) Pour $n = 2$, $\mathcal{A}(E) = \{Id\}$.

(c) \mathcal{A}_3 est cyclique, engendré par $\gamma_1 = (1, 2, 3)$. En effet, $\text{card}(\mathcal{A}_3) = \frac{3!}{2} = 3$ et le cycle γ_1 est d'ordre 3 dans \mathcal{A}_3 .

On suppose pour la suite du paragraphe que $n \geq 3$.

Proposition 6.4. — Le produit de deux transpositions est un produit de 3-cycles. Précisément, pour x, y, z, t deux à deux distincts dans E , on a

$$(x, y)(x, z) = (x, z, y) \quad \text{et} \quad (x, y)(z, t) = (x, y, z)(y, z, t).$$

Démonstration. — Soient τ_1 et τ_2 deux transpositions. Si $\tau_1 = \tau_2$, alors $\tau_1\tau_2 = \tau_1^2 = Id = \gamma^3$ pour n'importe quel 3-cycle.

Si $\tau_1 \neq \tau_2$, on a alors deux possibilités :

– soit $\text{supp}(\tau_1) \cap \text{supp}(\tau_2) = \{x\}$, donc $\tau_1 = (x, y)$ e, $\tau_2 = (x, z)$ avec $x, y, z \in E$ distincts et

$$\tau_1\tau_2 = (y, x)(x, z) = (y, x, z) = (x, z, y)$$

– soit $\text{supp}(\tau_1) \cap \text{supp}(\tau_2) = \emptyset$, donc $\tau_1 = (x, y)$ e, $\tau_2 = (z, t)$, avec $x, y, z, t \in E$ distincts et

$$\tau_1\tau_2 = (x, y)(z, t) = (x, y)(y, z)(y, z)(z, t) = (x, y, z)(y, z, t).$$

□

Théorème 6.5. — Pour $n \geq 3$, le groupe alterné $\mathcal{A}(E)$ est engendré par les 3-cycles.

Démonstration. — Comme $\mathfrak{S}(E)$ est engendré par les transpositions, on déduit du Théorème 5.1 et de la Proposition 5.7 qu'une permutation paire est le produit d'un nombre pair de transpositions et la proposition précédente nous dit que ce produit s'écrit comme produit de 3-cycles. \square

Théorème 6.6. — *Pour $n \geq 5$, les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}(E)$ sont $\{Id\}$, $\mathcal{A}(E)$ et $\mathfrak{S}(E)$.*

Démonstration. — Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}(E)$ distinct de $\{Id\}$.

Si H contient un 3-cycle σ , et si σ' est un autre 3-cycle, alors d'après Proposition 1.9 il existe $\gamma \in \mathfrak{S}(E)$ tel que $\sigma' = \gamma\sigma\gamma^{-1}$. Comme H est distingué dans $\mathfrak{S}(E)$, $\sigma' \in H$. Donc si H contient un 3-cycle, il contient tous les 3-cycles. Comme les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}(E)$ on a $\mathcal{A}(E) \subset H$. On en déduit que $H = \mathcal{A}(E)$ ou $H = \mathfrak{S}(E)$. En effet, on a $\mathcal{A}(E) \subset H \subset \mathfrak{S}(E)$, soit $[H : \mathcal{A}(E)] = p$ l'indice de $\mathcal{A}(E)$ dans H et $[\mathfrak{S}(E) : H] = q$ l'indice de H dans $\mathfrak{S}(E)$. Alors $|H| = p \frac{n!}{2} = p \frac{q|H|}{2}$, d'où $pq = 2$. Donc soit $p = 1$ donc $\mathcal{A}(E) = H$, soit $p = 2$ donc $H = \mathfrak{S}(E)$.

Il reste donc à montrer que H contient au moins un 3-cycle. On se donne $\sigma \in H \setminus \{Id\}$ et $\tau = (x, y)$ une transposition qui ne commute pas à σ (ceci est possible d'après Proposition 1.10). Comme H est distingué dans $\mathfrak{S}(E)$, on a

$$\sigma' = \tau\sigma\tau\sigma^{-1} = (\tau\sigma\tau^{-1})\sigma^{-1} \in H$$

et en écrivant

$$\sigma' = (x, y)(\sigma(x, y)\sigma^{-1}) = (x, y)(\sigma(x), \sigma(y))$$

on voit que σ' est produit de deux transpositions.

L'égalité $\sigma' = Id$ est réalisée si, et seulement si, $\tau\sigma\tau\sigma^{-1} = Id$ ou encore $\tau\sigma = \sigma\tau$ ce qui est exclu.

Si $\{x, y\} \cap \{\sigma(x), \sigma(y)\}$ est réduit à un point, alors σ' est un 3-cycle. Sinon cette intersection est vide et en prenant $z \in E \setminus \{x, y, \sigma(x), \sigma(y)\}$ (on a $n \geq 5$), le groupe H contient $(x, y)(\sigma(x), z)$ puisque le produit de deux transpositions de supports disjoints sont conjugués dans $\mathfrak{S}(E)$ et H est distingué. Il en résulte que H contient

$$(x, y)(\sigma(x), \sigma(y))(x, y)(\sigma(x), z) = (\tau(\sigma(x)), \tau(\sigma(y)))(\sigma(x), z) = (\sigma(x), \sigma(y))(\sigma(x), z)$$

qui est le 3-cycle $(\sigma(y), \sigma(x), z)$. D'où $H = \mathfrak{S}(E)$. \square

Lemme 6.7. — *Pour $n \geq 5$ deux 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}(E)$.*

Démonstration. — Soient $\gamma = (x_1, x_2, x_3)$ et $\gamma' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ deux 3-cycles. Puisque deux cycles de même longueur sont conjugués dans $\mathfrak{S}(E)$, alors γ et γ' sont conjugués dans $\mathfrak{S}(E)$. Il existe donc une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$ telle que $\gamma' = \sigma\gamma\sigma^{-1}$. On a alors $\sigma(x_k) = x'_k$ pour $k = 1, 2, 3$. Si $\sigma \in \mathcal{A}(E)$, c'est terminé. Sinon on choisit $x_4, x_5 \in E \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ (E a au moins 5 éléments

distincts) et on considère la permutation $\sigma' = (x_4, x_5)\sigma$. On a $\sigma' \in \mathcal{A}(E)$ et $\sigma'(x_k) = x'_k$, donc $\gamma' = \sigma'\gamma\sigma'^{-1}$. \square

Théorème 6.8. — *Pour $n = 3$ ou $n \geq 5$, le groupe $\mathcal{A}(E)$ est simple (c-à-d. n'a pas de sous-groupes distingués autres que lui-même et $\{Id\}$).*

Démonstration. — Pour $n = 3$, $\mathcal{A}(E)$ est cyclique d'ordre 3, il est donc simple.

On suppose $n \geq 5$ et on se donne un sous-groupe distingué H de $\mathcal{A}(E)$ distinct de $\{Id\}$. Pour montrer que $H = \mathcal{A}(E)$, il suffit de montrer que H contient un 3-cycle puisque les 3-cycles sont tous conjugués dans $\mathcal{A}(E)$, d'après le lemme précédent, et que les 3-cycles engendrent le groupe alterné.

Soit $\sigma \in H \setminus \{Id\}$ et $\gamma = (x, y, z) \in \mathcal{A}(E)$ un 3-cycle avec $y = \sigma(x)$ et $z \neq \sigma^2(x)$. On a alors $((x, y, z) \circ \sigma)(x) = z$ et $(\sigma \circ (x, y, z))(x) = \sigma^2(x)$, de sorte que σ et (x, y, z) ne commutent pas.

Comme H est distingué dans $\mathcal{A}(E)$, on a

$$\sigma' = \sigma\gamma\sigma^{-1}\gamma^{-1} = \sigma(\gamma\sigma^{-1}\gamma^{-1}) \in H.$$

En écrivant

$$\begin{aligned} \sigma' &= (\sigma(x, y, z)\sigma^{-1})(x, z, y) = (\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))(x, z, y) \\ &= (y, \sigma(y), \sigma(z))(x, z, y) \end{aligned}$$

on voit que σ' est produit de deux 3-cycles qui agissent sur l'ensemble $F = \{x, y, z, \sigma(y), \sigma(z)\}$ formé d'au plus 5 éléments (tous les points de $E \setminus F$ sont fixes).

L'égalité $\sigma' = Id$ est réalisée si et seulement si $\sigma\gamma\sigma^{-1}\gamma^{-1} = Id$ soit $\gamma\sigma = \sigma\gamma$, ce qui n'est pas vrai, donc $\sigma' \neq Id$.

Dans $\mathfrak{S}(F)$ la permutation σ' s'écrit donc comme produit de cycles de supports disjoints, cette décomposition étant celle de $\mathfrak{S}(E)$ et comme $\sigma' \in \mathcal{A}(E)$, il n'y a que trois possibilités : σ' est soit un 3-cycle, soit σ' est un produit de deux transpositions de supports disjoints, soit un 5-cycle.

- Dans le premier cas on a le résultat voulu.
- Dans le deuxième cas, on a $\sigma' = (x_1, x_2)(x_3, x_4)$ et choisissant $x_5 \in E \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, on a

$$\sigma'' := (x_1, x_5)\sigma'(x_1, x_5)(\sigma')^{-1} = ((x_1, x_5)\sigma'(x_1, x_5)^{-1})(\sigma')^{-1} \in H$$

avec

$$\sigma'' = (x_1, x_5)(\sigma'(x_1), \sigma'(x_5)) = (x_1, x_5)(x_2, x_5) = (x_1, x_5, x_2)$$

d'où le résultat cherché.

- Dans le troisième cas, on a $\sigma' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ et

$$\sigma'' := (x_1, x_2)\sigma'(x_1, x_2)(\sigma')^{-1} = ((x_1, x_2)\sigma'(x_1, x_2)^{-1})(\sigma')^{-1} \in H$$

avec

$$\sigma'' = (x_1, x_2)(\sigma'(x_1), \sigma'(x_2)) = (x_1, x_2)(x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$$

d'où le résultat cherché.

□