Algèbre 2, L3
Examen du 16/01/2025 à 9h
Documents/calculatrices interdits
Durée : 3h

Ce sujet est volontairement trop long afin que vous puissiez choisir les exercices qui vont conviennent le mieux. Privilégiez la qualité de la rédaction ainsi que la précision et la concision des arguments par rapport au souhait de traiter une grande partie des exercices.

Exercice 1. (questions de cours)

1. Soit G un groupe. Soit X et H des sous-ensembles de G. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "H est le sous-groupe engendré par X". Etant donné un groupe B, on notera $A \leq B$ pour dire que A est un sous-groupe de B.
2. Soit $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ les groupes obtenus en passant au quotient la somme sur $\mathbb{Z}$ (on ne demande pas de donner des détails sur la construction de ces deux groupes). Donner deux morphismes de groupes $\mathbb{Z}/3Z \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. Soit G un groupe fini. On note $|G| = n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, où les nombres p_i sont premiers et les α_i sont strictement positifs. Pour les deux affirmations suivantes, dites si elle est vraie en citant un résultat du cours (sans le démontrer) ou en donnant un contre-exemple et en justifiant que c'est bien un contre-exemple.
   (a) Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $1 \leq j \leq \alpha_i$. Dans G, il existe un sous-groupe d'ordre p_i^j.
   (b) Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $1 \leq j \leq \alpha_i$. Dans G, il existe un élément d'ordre p_i^j.

Exercice 2. (groupes abéliens finis)

1. Donner la liste de tous les groupes abéliens d'ordre 400 à isomorphisme près.
2. Donner la décomposition cyclique du groupe $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$.

Exercice 3. (groupe symétrique, groupe alterné)

1. Donner la définition du groupe alterné $\mathcal{A}_n$.
2. Dans $\mathfrak{S}_8$, l'élément $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ est-il dans $\mathcal{A}_8$? Si oui, l'écrire comme produit de 3-cycles.
3. Calculer σ_1^{2025}.
4. Dans $\mathfrak{S}_8$, l'élément $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ est-il dans $\mathcal{A}_8$? Si oui, l'écrire comme produit de 3-cycles.

Exercice 4. (produit direct de groupes)

1. Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes distingués de G. On suppose que $HK = G$ et $H \cap K = \{e\}$ et on montre que G est isomorphe au produit $H \times K$.
   (a) Soit $x \in H$ et $y \in K$. Montrer que $xyx^{-1}y^{-1} \in H \cap K$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in H, y \in K$, on a $xy = yx$.
   (c) Montrer que l'application $\begin{array}{cccc} \mu & : & H \times K & \to & G \\ & & (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$ est un morphisme de groupes.
   (d) Montrer que μ est injective.
   (e) Montrer que $G \simeq H \times K$.
2. Application : on suppose que G est un groupe d'ordre pq avec p et q premiers tels que $3 \leq p \leq 2q$ et $3 \leq q \leq 2p$. On montre que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que $p \not\equiv 1$ [q] et que $q \not\equiv 1$ [p].
   (b) Soit n_p le nombre de p-Sylow et n_q le nombre de q-Sylow. Montrer que $n_p = n_q = 1$. Soit S_p resp. S_q l'unique p-Sylow resp. q-Sylow.
   (c) Montrer que $S_p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $S_q \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

   (d) Montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/(pq)\mathbb{Z}$.

3. On donne deux contre-exemples au résultat précédent lorsque les conditions sur p et q ne sont pas satisafaites.
   (a) Donner un exemple de groupe d'ordre 6 non isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (contre-exemple au cas $p = 2, q = 3$).
   (b) Pour $q \geq 5$ un nombre premier, donner un exemple de groupe d'ordre $2q$ non isomorphe à $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ (contre-exemple au cas $p = 2, q \geq 5$).

Exercice 5. (action du groupe linéaire sur un corps fini)
Soit p un nombre premier et k le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On note $G = \mathrm{GL}_n(k)$ le groupe linéaire à coefficients dans k.

1. Rappeler la définition d'une action et montrer que G agit sur l'ensemble des vecteurs de k^n.
2. On détermine le cardinal de G.
   (a) Montrer que G agit sur l'ensemble des bases de k^n.
   (b) Montrer que cette action est simplement transitive : étant données deux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, il existe un unique $g \in G$ tel que $g \cdot \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.
   (c) Déterminer le nombre de bases de k^n.
   (d) Montrer que le cardinal de G est

$$p^{n(n-1)/2}(p-1)^n(1+p)(1+p+p^2)\cdots(1+p+\cdots+p^{n-1})$$

3. On étudie l'action de G sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels.
   (a) Montrer que G agit sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de k^n de dimension r, qu'on note $F(r,n)$.
   (b) Montrer que G agit transitivement sur $F(r,n)$.
   (c) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de k^n et soit F_r le sous-espace vectoriel de k^n engendré par $e_1, \ldots, e_r$. Montrer que le stabilisateur de F_r est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathrm{GL}_r, D \in \mathrm{GL}_{n-r}$ et B une matrice quelconque de format $r \times (n-r)$. On note $P_r \leq G$ ce stabilisateur.
4. On calcule le nombre de sous-espaces vectoriels. Pour cela, on considère le cas particulier $r = 2$ et $n = 4$.
   (a) Calculer le cardinal de G en fonction de p.
   (b) Calculer le cardinal de P_2 en fonction de p.
   (c) Calculer le cardinal de $F(2,4)$. On devra trouver un polynôme en p de degré 4.