Algèbre 2, L3
Examen du 12/01/2026 à 9h
Documents/calculatrices interdits
Durée : 3h

Exercice 1 (Question de cours).

1. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Pour $x \in X$, définir le stabilisateur G_x de x et son orbite $G \cdot x$. Quel résultat du cours établit un lien entre ces objets ?
2. Soit G, H des groupes et $f : G \to H$ une fonction. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "f est un isomorphisme de groupes".
3. Soit G un groupe fini, on note $|G| = n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, où les nombres p_i sont premiers distincts et les α_i sont strictement positifs. Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $1 \leq j \leq \alpha_i$. Dans G, existe-t-il toujours un élément d'ordre p_i^j ? On répondra en citant un résultat du cours ou en donnant un contre-exemple.

Exercice 2 (Classification des groupes abéliens d'ordre 72).

1. Dresser la liste complète, à isomorphisme près, des groupes abéliens d'ordre 72 sous leur forme de décomposition primaire (produit de groupes cycliques d'ordres des puissances de nombres premiers).
2. Pour chacun des groupes listés à la question précédente, donner sa décomposition cyclique.
3. Soit G un groupe abélien d'ordre 72. On suppose que G ne possède aucun élément d'ordre 9, mais qu'il possède au moins un élément d'ordre 12. Quel est le groupe G parmi ceux listés précédemment ?

Exercice 3 (Étude du groupe affine et de ses actions). On considère l'ensemble G des matrices réelles triangulaires supérieures définies par :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. **Structure algébrique**
   (a) Montrer que G est un sous-groupe du groupe général linéaire $GL_2(\mathbb{R})$. Le groupe G est-il abélien ?
   (b) Déterminer le centre $Z(G)$ du groupe G.
   (c) On considère le sous-ensemble H défini par :
   $$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}$$
      i. Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.
      ii. Montrer que l'application $\psi : \mathbb{R} \to H$ définie par $\psi(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(H, \times)$.
   (d) On considère l'application $\phi : G \to \mathbb{R}^*$ définie par :
   $$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = a$$
      i. Montrer que ϕ est un morphisme de groupes surjectif de $(G, \times)$ vers $(\mathbb{R}^*, \times)$.
      ii. Déterminer le noyau $\ker(\phi)$.
      iii. Enoncer le théorème de factorisation canonique des morphismes.
      iv. En déduire à quel groupe classique le quotient G/H est isomorphe.
2. **Action de groupe sur le plan**
   On fait agir le groupe G sur le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ par l'action naturelle (multiplication matrice-vecteur). Pour tout $g \in G$ et tout vecteur $X \in \mathbb{R}^2$, on note $g \cdot X = gX$.
   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, soit $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(e) Pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, exprimer les coordonnées du vecteur $g \cdot X$ en fonction de a, b, x et y.

(f) On cherche à déterminer les orbites de cette action, notées $G \cdot X = \{g \cdot X \mid g \in G\}$.

i. On suppose que $y \neq 0$. Montrer que l'orbite du point X est la droite horizontale d'équation $Y = y$.

ii. Déterminer l'orbite du point E_1.

iii. Déterminer l'orbite de l'origine O.

iv. Décrire la partition de $\mathbb{R}^2$ induite par cette action.

3. **Lien géométrique**

(g) Soit $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ le groupe des transformations affines de la droite réelle, c'est-à-dire l'ensemble des applications $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_{a,b}(t) = at + b$ (avec $a \neq 0$), muni de la loi de composition des applications. Construire un isomorphisme de groupes explicite $\Gamma : G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (Groupe dérivé). Soit $\mathbf{G}$ l'ensemble des matrices de la forme :

$$A(f, g, h) := \begin{pmatrix} 1 & f(X) & h(X, Y) \\ 0 & 1 & g(Y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où f, g et h sont des polynômes à coefficients réels (c'est-à-dire $f \in \mathbb{R}[X]$, $g \in \mathbb{R}[Y]$ et $h \in \mathbb{R}[X, Y]$).

1. On rappelle que lorsque $\mathbb{K}$ est un corps, l'ensemble $UT_3(\mathbb{K})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$, et donc un groupe. On ne demande pas de preuve de ces résultats. Montrer que $\mathbf{G}$ est un sous-groupe du groupe $UT_3(\mathbb{R}(X, Y))$, où $\mathbb{R}(X, Y)$ désigne le corps des fractions rationnelles P/Q avec $P, Q \in \mathbb{R}[X, Y]$ et $Q \neq 0$.
2. Soit $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[X]$, $g_1, g_2 \in \mathbb{R}[Y]$ et $h_1, h_2 \in \mathbb{R}[X, Y]$. Déterminer le commutateur $[A(f_1, g_1, h_1), A(f_2, g_2, h_2)]$ dans $\mathbf{G}$ (on rappelle que $[B, C] = BCB^{-1}C^{-1}$).
3. Démontrer que le groupe dérivé de $\mathbf{G}$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & h(X, Y) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } h(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y].$$

4. Démontrer que la matrice C définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & X^2 + XY + Y^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas un commutateur. On pourra utiliser le résultat suivant : si $P_0, \ldots, P_k, Q_0, \ldots, Q_k \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes tels que $\Sigma_{i=0}^k P_i Y^i = \Sigma_{i=0}^k Q_i Y^i$ (égalité dans $\mathbb{R}[X, Y]$), alors pour tout i, $P_i = Q_i$.

Exercice 5 (Les 3-Sylow de $\mathfrak{S}_6$ et $\mathcal{A}_6$).

1. Ordre et structure abstraite

(a) Déterminer l'ordre de $\mathfrak{S}_6$. Quel est l'ordre d'un 3-sous-groupe de Sylow de $\mathfrak{S}_6$?

(b) Montrer que $\mathfrak{S}_6$ ne contient aucun élément d'ordre 9.

(c) En déduire que tout 3-sous-groupe de Sylow de $\mathfrak{S}_6$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.

2. Construction explicite

(a) Soient les cycles $\sigma = (1\ 2\ 3)$ et $\tau = (4\ 5\ 6)$. Montrer que le sous-groupe $P = \langle \sigma, \tau \rangle$ engendré par σ et τ est un 3-Sylow de $\mathfrak{S}_6$.

(b) Énumérer les éléments de P. Combien contient-il d'éléments d'ordre 3 ayant pour support un ensemble à 3 éléments ? Combien contient-il de produits de deux 3-cycles disjoints ?

3. Normalisateur et dénombrement : on cherche à déterminer le nombre n_3 de 3-Sylow à l'aide du normalisateur $N_{\mathfrak{S}_6}(P) = \{g \in \mathfrak{S}_6, gPg^{-1} = P\}$.
   (a) On note $E_1 = \{1, 2, 3\}$ et $E_2 = \{4, 5, 6\}$. Soit $g \in \mathfrak{S}_6$. Montrer que $g \in N_{\mathfrak{S}_6}(P)$ si et seulement si $g(E_1) = E_1$ ou $g(E_1) = E_2$.
   (b) En déduire l'ordre du normalisateur $|N_{\mathfrak{S}_6}(P)|$. On pourra considérer la permutation $\gamma = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$.
   (c) En utilisant l'action de $\mathfrak{S}_6$ par conjugaison sur l'ensemble de ses 3-Sylow, calculer n_3.
   (d) Vérifier que le résultat est cohérent avec le troisième théorème de Sylow.
4. **Les 3-Sylow de $\mathcal{A}_6$**
   (a) Montrer que $P \subset \mathcal{A}_6$.
   (b) Déterminer le nombre de 3-Sylow dans le groupe alterné $\mathcal{A}_6$.