

Barème sur 20. Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1 (Questions de cours). 4 points

1. Soit G un groupe et $H \subset G$. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation " H est un sous-groupe de G ".
2. Soient G, G' deux groupes et $f : G \rightarrow G'$ une application. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation " f est un morphisme de groupes". Rappeler la définition de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
3. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E . Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation " $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence".
4. Donner la définition d'un groupe monogène, puis d'un groupe cyclique.

Solution :

1. $e_G \in H$ (ou $H \neq \emptyset$), $\forall x, y \in H, xy \in H$, et $\forall x \in H, x^{-1} \in H$. (Ou, de façon condensée : $H \neq \emptyset$ et $\forall x, y \in H, xy^{-1} \in H$). **1 point**
2. $\forall x, y \in G, f(xy) = f(x)f(y)$. Et $\text{Ker}(f) = \{x \in G : f(x) = e_{G'}\}$, $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in G\}$. **1 point**
3. Réflexivité : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$; symétrie : $\forall x, y \in E, (x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$; transitivité : $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$. **1 point**
4. Un groupe G est *monogène* s'il existe $x \in G$ tel que $G = \langle x \rangle$. Il est *cyclique* s'il est monogène et fini. **1 point**

Exercice 2 (Parties d'un ensemble et ensemble quotient). 4 points Soit $X = \{a, b, c\}$ et soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X . On définit sur $\mathcal{P}(X)$ la relation

$$ARB \iff \text{Card}(A) = \text{Card}(B).$$

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(X)$? Écrire la liste de tous ses éléments.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(X)$.
3. Déterminer explicitement les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. Combien l'ensemble quotient $\mathcal{P}(X)/\mathcal{R}$ a-t-il d'éléments?
4. Vérifier sur cet exemple que les classes d'équivalence forment une partition de $\mathcal{P}(X)$.

Solution :

1. $\text{Card}(\mathcal{P}(X)) = 2^3 = 8$, et

$$\mathcal{P}(X) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X \}.$$

1 point

2. Réflexivité : $\text{Card}(A) = \text{Card}(A)$ donc $A\mathcal{R}A$. Symétrie : si $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ alors $\text{Card}(B) = \text{Card}(A)$, donc $ARB \Rightarrow BRA$. Transitivité : si $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$ et $\text{Card}(B) = \text{Card}(C)$, alors $\text{Card}(A) = \text{Card}(C)$. La relation $\mathcal{R}$ est donc bien une relation d'équivalence (elle est obtenue en tirant en arrière l'égalité par l'application $A \mapsto \text{Card}(A)$). **1,5 points**
3. Les classes sont regroupées selon le cardinal commun, qui vaut 0, 1, 2 ou 3 :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \{ \emptyset \}, & \mathcal{C}_1 &= \{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \}, & \mathcal{C}_3 &= \{ X \}. \end{aligned}$$

L'ensemble quotient $\mathcal{P}(X)/\mathcal{R} = \{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\}$ a donc 4 éléments. **1 point**

4. Les $\mathcal{C}_i$ sont non vides, deux à deux disjoints (une partie a un cardinal et un seul), et leur réunion est $\mathcal{P}(X)$: $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = \text{Card}(\mathcal{P}(X))$. **0,5 points**

Exercice 3 (Les racines n -èmes de l'unité). 4 points Pour $n \geq 1$, on pose

$$\mu_n = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\}.$$

1. Montrer que μ_n est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Pour $n = 6$, écrire tous les éléments de μ_6 sous la forme $e^{i\theta}$, et les placer sur un dessin.
3. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Montrer que $\mu_n = \langle \omega \rangle$.
4. Quel est l'ordre du groupe μ_n ? Quel est l'ordre de l'élément ω ?

Solution :

1. $1 \in \mu_n$ car $1^n = 1$, donc $\mu_n \neq \emptyset$. Si $z, z' \in \mu_n$, alors $(zz')^n = z^n z'^n = 1$ (la multiplication dans $\mathbb{C}^*$ est commutative), donc $zz' \in \mu_n$. Enfin $(z^{-1})^n = (z^n)^{-1} = 1$, donc $z^{-1} \in \mu_n$. Ainsi $\mu_n \leq \mathbb{C}^*$. **1,5 points**
2. $\mu_6 = \{1, e^{i\pi/3}, e^{2i\pi/3}, e^{i\pi}, e^{4i\pi/3}, e^{5i\pi/3}\}$, c'est-à-dire $\{e^{2ik\pi/6}, k = 0, \dots, 5\}$: ce sont les sommets de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle unité, le premier sommet étant 1. **0,5 points**
3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(\omega^k)^n = (\omega^n)^k = 1$, donc $\langle \omega \rangle \subset \mu_n$. Réciproquement, soit $z \in \mu_n$. Écrivons $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ (tout élément de μ_n est de module 1 puisque $|z|^n = 1$ avec $|z| > 0$). La condition $z^n = 1$ donne $e^{in\theta} = 1$, donc $n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\theta = 2k\pi/n$ pour un entier k , et alors $z = \omega^k$. **1 point**
4. Les éléments $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^{n-1}$ sont deux à deux distincts (leurs arguments $2k\pi/n$ sont distincts dans $[0, 2\pi[$), donc $\text{Card}(\mu_n) = n$. L'élément ω engendre μ_n tout entier, donc son ordre est n également. **1 point**

Exercice 4 (Le groupe quotient $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$). 4 points On note $H = 4\mathbb{Z} = \{4k : k \in \mathbb{Z}\}$, vu comme partie du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

1. Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $x\mathcal{R}y \iff x - y \in H$. Décrire les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$; combien y en a-t-il?
3. On note $\bar{x}$ la classe de x . Montrer soigneusement que si $\bar{x} = \bar{x'}$ et $\bar{y} = \bar{y'}$, alors $\overline{x+y} = \overline{x'+y'}$. Quelle est l'importance de ce résultat?
4. Dresser la table d'addition du groupe quotient $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et donner l'opposé de chacun de ses éléments.

Solution :

1. $0 = 4 \times 0 \in H$. Si $x = 4k$ et $y = 4l$ sont dans H , alors $x + y = 4(k + l) \in H$ et $-x = 4(-k) \in H$. Donc $H \leq (\mathbb{Z}, +)$. **0,5 points**
2. $x\mathcal{R}y$ signifie que $x - y$ est un multiple de 4, c'est-à-dire que x et y ont le même reste dans la division euclidienne par 4. Les classes sont donc

$$\bar{0} = 4\mathbb{Z}, \quad \bar{1} = 1 + 4\mathbb{Z}, \quad \bar{2} = 2 + 4\mathbb{Z}, \quad \bar{3} = 3 + 4\mathbb{Z},$$

soit 4 classes, correspondant aux restes possibles 0, 1, 2, 3. **1 point**

3. Supposons $\bar{x} = \bar{x'}$ et $\bar{y} = \bar{y'}$: il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $x - x' = 4k$ et $y - y' = 4l$. Alors

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') = 4k + 4l = 4(k + l) \in H,$$

donc $\overline{x+y} = \overline{x'+y'}$. *Importance* : ce calcul montre que l'addition $\bar{x} + \bar{y} := \overline{x+y}$ ne dépend pas des représentants choisis. C'est exactement ce qui permet de définir une loi de groupe sur l'ensemble quotient, et donc de parler du *groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$* . **1,5 points**

4. **1 point**

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Opposés : $-\bar{0} = \bar{0}$, $-\bar{1} = \bar{3}$, $-\bar{2} = \bar{2}$, $-\bar{3} = \bar{1}$.

Exercice 5 (Permutations). 4 points On considère la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_8$ définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 7 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les points fixes et le support de σ .
2. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.

3. La partie $\{1, 3, 5\}$ est-elle stable par σ ? Et la partie $\{1, 2\}$? Justifier.
4. Écrire σ comme un produit de transpositions.
5. Déterminer σ^{-1} , puis calculer σ^2 et σ^3 .

Solution :

1. Le seul point fixe est 6 (car $\sigma(6) = 6$ et $\sigma(x) \neq x$ pour tout autre x). Le support est donc $\text{Supp}(\sigma) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. **0,5 points**
2. On suit les orbites : $1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 1$, puis $2 \mapsto 8 \mapsto 2$, puis $4 \mapsto 7 \mapsto 4$, et 6 est fixe. Donc

$$\sigma = (1\ 3\ 5)(2\ 8)(4\ 7).$$

1 point

3. $\{1, 3, 5\}$ est stable : $\sigma(1) = 3$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(5) = 1$, donc $\sigma(\{1, 3, 5\}) = \{1, 3, 5\}$ (c'est le support d'un des cycles). En revanche $\{1, 2\}$ n'est pas stable, car $\sigma(1) = 3 \notin \{1, 2\}$. **0,5 points**
4. Un 3-cycle s'écrit $(1\ 3\ 5) = (1\ 5)(1\ 3)$, les autres facteurs étant déjà des transpositions. Donc

$$\sigma = (1\ 5)(1\ 3)(2\ 8)(4\ 7),$$

produit de 4 transpositions. **1 point**

Remarque : cette écriture n'est pas unique (on peut par exemple insérer deux fois la même transposition), mais toute permutation admet une telle décomposition.

5. En inversant chaque cycle (et en notant que les transpositions sont leurs propres inverses) :

$$\sigma^{-1} = (1\ 5\ 3)(2\ 8)(4\ 7).$$

Pour les puissances : élever un 3-cycle au carré revient à l'inverser, et le carré d'une transposition est l'identité, donc

$$\sigma^2 = (1\ 5\ 3), \quad \sigma^3 = (2\ 8)(4\ 7).$$

1 point