

Exercice 1 (Questions de cours).

1. Soit G un groupe et $H \subset G$. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation “ H est un sous-groupe de G ”.
2. Soient G, G' deux groupes et $f : G \rightarrow G'$ une application. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation “ f est un morphisme de groupes”. Rappeler la définition de $\text{Ker}(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
3. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E . Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation “ $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence”.
4. Donner la définition d'un groupe monogène, puis d'un groupe cyclique.

Exercice 2 (Parties d'un ensemble et ensemble quotient). Soit $X = \{a, b, c\}$ et soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X . On définit sur $\mathcal{P}(X)$ la relation

$$ARB \iff \text{Card}(A) = \text{Card}(B).$$

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(X)$? Écrire la liste de tous ses éléments.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(X)$.
3. Déterminer explicitement les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. Combien l'ensemble quotient $\mathcal{P}(X)/\mathcal{R}$ a-t-il d'éléments?
4. Vérifier sur cet exemple que les classes d'équivalence forment une partition de $\mathcal{P}(X)$.

Exercice 3 (Les racines n -èmes de l'unité). Pour $n \geq 1$, on pose

$$\mu_n = \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\}.$$

1. Montrer que μ_n est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Pour $n = 6$, écrire tous les éléments de μ_6 sous la forme $e^{i\theta}$, et les placer sur un dessin.
3. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Montrer que $\mu_n = \langle \omega \rangle$.
4. Quel est l'ordre du groupe μ_n ? Quel est l'ordre de l'élément ω ?

Exercice 4 (Le groupe quotient $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$). On note $H = 4\mathbb{Z} = \{4k : k \in \mathbb{Z}\}$, vu comme partie du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

1. Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $x\mathcal{R}y \iff x - y \in H$. Décrire les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$; combien y en a-t-il?
3. On note $\bar{x}$ la classe de x . Montrer soigneusement que si $\bar{x} = \bar{x}'$ et $\bar{y} = \bar{y}'$, alors $\overline{x+y} = \overline{x'+y'}$. Quelle est l'importance de ce résultat?
4. Dresser la table d'addition du groupe quotient $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, et donner l'opposé de chacun de ses éléments.

Exercice 5 (Permutations). On considère la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_8$ définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 7 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les points fixes et le support de σ .
2. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
3. La partie $\{1, 3, 5\}$ est-elle stable par σ ? Et la partie $\{1, 2\}$? Justifier.
4. Écrire σ comme un produit de transpositions.
5. Déterminer σ^{-1} , puis calculer σ^2 et σ^3 .