Algèbre 2, L3
Interrogation écrite du 13/10/2026
Documents/calculatrices interdits
Durée : 1 heure

Questions de cours

Exercice 1. Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe.

1. Définir la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur G permettant de définir l'ensemble quotient G/H, et démontrer que c'est bien une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in G$. Décrire la classe d'équivalence de x pour $\mathcal{R}$.
3. Donner la définition de l'ensemble quotient G/H.

Solution :

1. Pour $x, y \in G$, on pose $x\mathcal{R}y \iff y^{-1}x \in H$.
   - Réflexivité : pour $x \in G$, $x^{-1}x = e \in H$, donc $x\mathcal{R}x$.
   - Symétrie : si $x\mathcal{R}y$, alors $y^{-1}x \in H$, et comme H est stable par passage à l'inverse, $(y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}y \in H$, donc $y\mathcal{R}x$.
   - Transitivité : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $y^{-1}x \in H$ et $z^{-1}y \in H$, donc par stabilité par produit $z^{-1}x = (z^{-1}y)(y^{-1}x) \in H$, c'est-à-dire $x\mathcal{R}z$.
2. La classe de x est $\{y \in G \mid y\mathcal{R}x\} = \{y \in G \mid x^{-1}y \in H\}$. Or $x^{-1}y = h \in H \iff y = xh$, donc la classe de x est $xH = \{xh \mid h \in H\}$ (classe à gauche de x).
3. L'ensemble quotient G/H est l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des classes à gauche : $G/H = \{xH \mid x \in G\} \subset \mathcal{P}(G)$.

Exercice 2. Soit G un groupe et $X \subset G$ une partie de G.

1. Donner la définition du sous-groupe $\langle X \rangle$ engendré par X.
2. Soit $K \subset G$. Enoncer les deux propriétés qui caractérisent l'égalité $K = \langle X \rangle$.

Solution :

1. $\langle X \rangle$ est l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent X. C'est le plus petit sous-groupe de G (pour l'inclusion) contenant X.
2. On a $K = \langle X \rangle$ si et seulement si :
   (a) K est un sous-groupe de G et $X \subset K$;
   (b) si H est un sous-groupe de G contenant X, alors $K \subset H$.

Exercices

Exercice 3. Dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$, on considère le sous-groupe $H = \{\mathrm{Id}, (12)\}$.

1. Déterminer toutes les classes à gauche xH, pour $x \in \mathfrak{S}_3$. Combien l'ensemble $\mathfrak{S}_3/H$ a-t-il d'éléments ? Vérifier la cohérence avec le théorème de Lagrange.
2. Calculer la classe à droite $H(13)$ et la comparer à $(13)H$. Le sous-groupe H est-il distingué ?

Solution :

1. On calcule $(13)(12) = (123)$, $(23)(12) = (132)$ et $(123)(12) = (13)$, $(132)(12) = (23)$. Les classes à gauche sont donc :

$$H = (12)H = \{\mathrm{Id}, (12)\}, \quad (13)H = (123)H = \{(13), (123)\}, \quad (23)H = (132)H = \{(23), (132)\}.$$

   Ainsi $\mathfrak{S}_3/H$ a 3 éléments, et on a bien $|\mathfrak{S}_3| = 6 = 3 \times 2 = [\mathfrak{S}_3 : H]\,|H|$, conformément au théorème de Lagrange.
2. On calcule $(12)(13) = (132)$, donc $H(13) = \{(13), (132)\} \neq \{(13), (123)\} = (13)H$. Le sous-groupe H n'est donc pas distingué, puisqu'un sous-groupe distingué vérifie $xH = Hx$ pour tout $x \in G$. (On peut aussi remarquer que $(13)(12)(13)^{-1} = (23) \notin H$.)

Exercice 4.

1. Montrer que $4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Déterminer, en justifiant, le sous-groupe $\langle 4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z} \rangle$ de $\mathbb{Z}$ engendré par $4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$.
3. Dans $\mathfrak{S}_4$, on pose $a = (12)(34)$ et $b = (13)(24)$. Déterminer, en justifiant, les éléments du sous-groupe $\langle a, b \rangle$.

Solution :

1. On a $4 \in 4\mathbb{Z}$ et $6 \in 6\mathbb{Z}$, mais $4 + 6 = 10$ n'est multiple ni de 4 ni de 6, donc $10 \notin 4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$. L'ensemble $4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$ n'est pas stable par addition, ce n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
2. Montrons que $\langle 4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z} \rangle = 2\mathbb{Z}$. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ contenant $4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$. Alors $4, 6 \in H$, donc $2 = 6 - 4 \in H$, puis $2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle \subset H$: c'est la propriété (b). Réciproquement, $2\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, et il contient $4\mathbb{Z}$ et $6\mathbb{Z}$ (les multiples de 4 et de 6 sont pairs) : c'est la propriété (a). Donc $\langle 4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z} \rangle = 2\mathbb{Z}$.
3. Soit H un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ contenant a et b. Il contient Id et le produit $c := ab = (14)(23)$. On vérifie aussi que $ba = (14)(23) = c$. Ainsi H contient $K = \{\mathrm{Id}, a, b, c\}$. Montrons que K est un sous-groupe. Il contient Id. Les éléments a, b, c sont des produits de deux transpositions à supports disjoints, donc $a^2 = b^2 = c^2 = \mathrm{Id}$: chaque élément de K est son propre inverse. Enfin, comme $ab = ba = c$, on a

$$ac = a(ab) = b, \quad ca = (ba)a = b, \quad bc = b(ba) = a, \quad cb = (ab)b = a,$$

donc K est stable par produit. Ainsi K est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ contenant a et b, et il est inclus dans tout sous-groupe contenant a et b, donc

$$\langle a, b \rangle = \{\mathrm{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$