Algèbre 2, L3
Interrogation écrite du 13/10/2026
Documents/calculatrices interdits
Durée : 1 heure

Questions de cours

Exercice 1. Soit G un groupe et $H \leq G$ un sous-groupe.

1. Définir la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur G permettant de définir l'ensemble quotient G/H, et démontrer que c'est bien une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in G$. Décrire la classe d'équivalence de x pour $\mathcal{R}$.
3. Donner la définition de l'ensemble quotient G/H.

Exercice 2. Soit G un groupe et $X \subset G$ une partie de G.

1. Donner la définition du sous-groupe $\langle X \rangle$ engendré par X.
2. Soit $K \subset G$. Enoncer les deux propriétés qui caractérisent l'égalité $K = \langle X \rangle$.

Exercices

Exercice 3. Dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$, on considère le sous-groupe $H = \{\mathrm{Id}, (12)\}$.

1. Déterminer toutes les classes à gauche xH, pour $x \in \mathfrak{S}_3$. Combien l'ensemble $\mathfrak{S}_3/H$ a-t-il d'éléments ? Vérifier la cohérence avec le théorème de Lagrange.
2. Calculer la classe à droite $H(13)$ et la comparer à $(13)H$. Le sous-groupe H est-il distingué ?

Exercice 4.

1. Montrer que $4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Déterminer, en justifiant, le sous-groupe $\langle 4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z} \rangle$ de $\mathbb{Z}$ engendré par $4\mathbb{Z} \cup 6\mathbb{Z}$.
3. Dans $\mathfrak{S}_4$, on pose $a = (12)(34)$ et $b = (13)(24)$. Déterminer, en justifiant, les éléments du sous-groupe $\langle a, b \rangle$.