Algèbre 2, L3
Partiel du 13/11/2024 à 9h
Documents/calculatrices interdits
Durée : 2h

Ce sujet est trop long pour être traité en deux heures mais vous permet de choisir les exercices sur lesquels vous êtes le plus à l'aise.

Exercice 1. (Exercice de cours)
Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p. Montrer que G est isomorphe à $Z/p\mathbb{Z}$.

Exercice 2. (Exercice de cours)
Soit G un groupe abélien et $H \subset G$ un sous-groupe.

1. Montrer que H est un groupe abélien.
2. Montrer que H est distingué dans G.
3. Rappeler comment est définie la structure de groupe sur G/H lorsque H est distingué.
4. Montrer que G/H est un groupe abélien.

Exercice 3. (Groupe quaternionique)
Soit n un entier. Soit $x = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix}$ avec $\omega = e^{i\pi/n}$ et $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On s'intéresse au sous-groupe G de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par x et y, appelé *groupe quaternionique d'ordre* $4n$.

1. Montrer que $x^n = y^2 = -I$ et que $xy = yx^{-1}$.
2. Déterminer en fonction de j la matrice y^j.
3. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $xy^j = y^j x^{(-1)^j}$ (on pourra distinguer 4 cas selon la classe de j modulo 4).
4. Par récurrence sur i, montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $x^i y^j = y^j x^{(-1)^j i}$.
5. Montrer que cette relation est vraie pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$.
6. Soient $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'on a
$$x^{i_1} y^{j_1} x^{i_2} y^{j_2} = x^{i_1 + (-1)^{j_1} i_2} y^{j_1 + j_2}. \tag{1}$$
7. Soit $K = \{x^i y^j \mid i \in \{0, \ldots, 2n-1\},\ j \in \{0, 1\}\}$. Montrer que K est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
8. Montrer que K est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par x et y.

Solution :

1. Les relations $x^n = -I = y^2$ sont évidentes. On a $xy = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \overline{\omega} & 0 \end{pmatrix} = yx^{-1}$, d'où la troisième relation.
2. On a $y^j = I_2, y, -I_2$ resp. $-y$ si j est congru à $0, 1, 2$ resp. 3 modulo 4.
3. Si j est pair, alors $y^j = I_2$ ou $y^j = -I_2$, donc y^j est dans le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, donc $xy^j = y^j x$. Si j est impair, il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $y^j \epsilon y$. On a alors $xy^j = x(\epsilon y) = \epsilon xy = \epsilon yx^{-1} = y^j x^{-1}$.
4. L'initialisation avec $i = 1$ a été faite à la question précédente et l'hérédité est facile à montrer.
5. La propriété est vraie pour $i \geq 0$. Soit $i \geq 0$. On a $x^i y^j = y^j x^{(-1)^j i}$ donc $y^j = x^{-i} y^j x^{(-1)^j i}$ donc $y^j x^{-(-1)^j i} = x^{-i} y^j$, de sorte que la propriété est vraie pour $-i$, donc finalement pour tout entier relatif i.

Exercice 4. Soit G un groupe d'ordre 55 agissant sur un ensemble de cardinal 18. Montrer que G a au moins 2 points fixes.

Solution : On a soit une orbite de cardinal 11, une orbite de cardinal 5, et 2 points fixes, soit trois orbites de cardinal 5 et trois points fixes.

Exercice 5. On se propose de déterminer les groupes finis qui ont exactement trois classes de conjugaison. Soit G un groupe fini, d'ordre n, et supposons que G a exactement trois classes de conjugaison. On considère alors l'action de G sur lui-même par conjugaison (donnée par $g \cdot x = gxg^{-1}$). L'orbite d'un élément $x \in G$ est donc sa classe de conjugaison, à savoir l'ensemble $\{gxg^{-1} \mid g \in G\}$. On note e l'élément neutre de G. Etant donné $x \in G$, on appelle centralisateur de x l'ensemble des éléments g tels que $gx = xg$. On le note C_x.

1. Montrer que $\{e\}$ est une classe de conjugaison. Puisque, par hypothèse, G a trois classes de conjugaison, on note A et B les deux autres classes de conjugaison.
2. Pour $x \in G$, montrer que C_x est un sous-groupe de G.
3. Montrer que le cardinal $|C_x|$ de C_x ne dépend pas de $x \in A$. On le note a. De même, on note $b = |C_x|$ pour $x \in B$. Quitte à échanger A et B, on peut supposer que $b \leq a$.
4. Montrer que $a|n$ et $b|n$ et que
$$1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \tag{2}$$
5. On détermine toutes les solutions de l'équation (2) :
   (a) Montrer que $n = 2$ est impossible.
   (b) Dans le cas $n = 3$, montrer que $a = b = 3$.
   (c) On suppose dans cette question et les suivantes que $n \geq 4$. Montrer que $b = 2$.
   (d) Montrer que $a = \frac{2n}{n-2}$.
   (e) Montrer que $n = a = 4$ ou $n = 6$ et $a = 3$.
6. La liste des triplets (n, a, b) possibles est donc $(3, 3, 3), (4, 4, 2), (6, 3, 2)$. Si $n = 3$, montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Y a-t-il effectivement 3 classes de conjugaison ?
7. Si $n = 4$, montrer que G est abélien et trouver une contradiction.
8. Si $n = 6$, montrer que G est non abélien. On rappelle que le groupe des permutations $\mathfrak{S}_3$ est le seul groupe non abélien d'ordre 6 : G est donc isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_3$.
9. Montrer que $G = \mathfrak{S}_3$ a bien 3 classes de conjugaison.

Solution :

1. On a pour tout $g \in G$, $geg^{-1} = e$, ce qui implique que $G \cdot e = \{e\}$.
2. Si $g, h \in C_x$, alors $gx = xg$ et $hx = xh$, donc $x = h^{-1}hx = h^{-1}xh$ et donc $xh^{-1} = h^{-1}x$, ce qui implique $gh^{-1}x = gxh^{-1} = xgh^{-1}$, donc $gh^{-1} \in C_x$. Ainsi, C_x est bien un sous-groupe.
3. On a vu dans le cours que pour $y \in G \cdot x$, on a $G \cdot y = G \cdot x$ et
$$|G \cdot y| = |G \cdot x| = \frac{|G|}{|G_x|} = \frac{|G|}{|G_y|}.$$
Ainsi $|G_x| = |G_y|$. Le résultat découle de ce que $G_x = C_x$ et $G_y = C_y$.
4. Puisque C_x est un sous-groupe de G, le théorème de Lagrange donne que $|C_x|$ divise $|G|$. Donc $a|n$. Pour l'action de G sur lui-même par conjugaison, l'équation aux classes donne $n = |G| = 1 + n/a + n/b$. En divisant par n, on trouve l'équation souhaitée.
5. Si $n = 2$, alors $a|2$ et $b|2$, donc $\frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{3}{2}$, ce qui est contradictoire. Si $n = 3$, alors $a|3$ et $b|3$, la seule solution est $a = b = 3$. Si $n \geq 4$, alors $b = 2$ car sinon $\frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1$. Alors $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{a} = \frac{n-2}{2n}$, $a = \frac{2n}{n-2}$. Ainsi, $n - 2 | 2n$. D'où $n - 2 | 2n - 2(n-2)$, $n - 2 | 4$. On a donc $n - 2 = 2$, $n = 4$, $a = 4$, ou $n - 2 = 4$, $n = 6$, $a = 3$.
6. Si $n = 3$, G est d'ordre 3, donc isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Notons que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ convient car il est abélien et a donc 3 classes de conjugaison comprenant chacune 1 élément.

7. Si $n = 4$, G est d'ordre le carré d'un nombre premier, donc G est abélien, donc g a 4 classes de conjugaison (réduites à un élément), ce qui présente une contradiction avec l'hypothèse. Ce cas ne se produit donc pas.
8. Si $n = 6$, G est d'ordre 6 et a 3 classes de conjugaison. S'il était abélien, on aurait $gxg^{-1} = gg^{-1}x = x$ pour tout $x, g \in G$, donc les classes de conjugaison seraient réduites à un élément, et il y en aurait 6, contredisant l'hypothèse. Ainsi G est donc non abélien, donc isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.
9. Notons que $\mathfrak{S}_3$ a bien trois classes de conjugaison, à savoir celle réduite à l'élément neutre, celle comprenant les 3 transpositions $(12), (13)$ et (23), et celle comprenant les 2 cycles de longueur trois (123) et (132).