**Algèbre 2, L3**
**Partiel du 13/11/2024 à 9h**
**Documents/calculatrices interdits**
**Durée : 2h**

Ce sujet est trop long pour être traité en deux heures mais vous permet de choisir les exercices sur lesquels vous êtes le plus à l'aise.

**Exercice 1.** (Exercice de cours)
Soit $p$ un nombre premier et $G$ un groupe d'ordre $p$. Montrer que $G$ est isomorphe à $Z/p\mathbb{Z}$.

**Exercice 2.** (Exercice de cours)
Soit $G$ un groupe abélien et $H \subset G$ un sous-groupe.

1. Montrer que $H$ est un groupe abélien.
2. Montrer que $H$ est distingué dans $G$.
3. Rappeler comment est définie la structure de groupe sur $G/H$ lorsque $H$ est distingué.
4. Montrer que $G/H$ est un groupe abélien.

**Exercice 3.** (Groupe quaternionique)
Soit $n$ un entier. Soit $x = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \overline{\omega} \end{pmatrix}$ avec $\omega = e^{i\pi/n}$ et $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On s'intéresse au sous-groupe $G$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par $x$ et $y$, appelé *groupe quaternionique d'ordre* $4n$.

1. Montrer que $x^n = y^2 = -I$ et que $xy = yx^{-1}$.
2. Déterminer en fonction de $j$ la matrice $y^j$.
3. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $xy^j = y^j x^{(-1)^j}$ (on pourra distinguer 4 cas selon la classe de $j$ modulo 4).
4. Par récurrence sur $i$, montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $x^i y^j = y^j x^{(-1)^j i}$.
5. Montrer que cette relation est vraie pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$.
6. Soient $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'on a
$$x^{i_1} y^{j_1} x^{i_2} y^{j_2} = x^{i_1 + (-1)^{j_1} i_2} y^{j_1 + j_2}. \tag{1}$$
7. Soit $K = \{x^i y^j \mid i \in \{0, \ldots, 2n-1\},\ j \in \{0, 1\}\}$. Montrer que $K$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
8. Montrer que $K$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par $x$ et $y$.

**Exercice 4.** Soit $G$ un groupe d'ordre 55 agissant sur un ensemble de cardinal 18. Montrer que $G$ a au moins 2 points fixes.

**Exercice 5.** On se propose de déterminer les groupes finis qui ont exactement trois classes de conjugaison. Soit $G$ un groupe fini, d'ordre $n$, et supposons que $G$ a exactement trois classes de conjugaison. On considère alors l'action de $G$ sur lui-même par conjugaison (donnée par $g \cdot x = gxg^{-1}$). L'orbite d'un élément $x \in G$ est donc sa classe de conjugaison, à savoir l'ensemble $\{gxg^{-1} \mid g \in G\}$. On note $e$ l'élément neutre de $G$. Etant donné $x \in G$, on appelle centralisateur de $x$ l'ensemble des éléments $g$ tels que $gx = xg$. On le note $C_x$.

1. Montrer que $\{e\}$ est une classe de conjugaison. Puisque, par hypothèse, $G$ a trois classes de conjugaison, on note $A$ et $B$ les deux autres classes de conjugaison.
2. Pour $x \in G$, montrer que $C_x$ est un sous-groupe de $G$.
3. Montrer que le cardinal $|C_x|$ de $C_x$ ne dépend pas de $x \in A$. On le note $a$. De même, on note $b = |C_x|$ pour $x \in B$. Quitte à échanger $A$ et $B$, on peut supposer que $b \leq a$.
4. Montrer que $a|n$ et $b|n$ et que
$$1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \tag{2}$$
5. On détermine toutes les solutions de l'équation (2) :
   (a) Montrer que $n = 2$ est impossible.
   (b) Dans le cas $n = 3$, montrer que $a = b = 3$.
   (c) On suppose dans cette question et les suivantes que $n \geq 4$. Montrer que $b = 2$.
   (d) Montrer que $a = \frac{2n}{n-2}$.
   (e) Montrer que $n = a = 4$ ou $n = 6$ et $a = 3$.
6. La liste des triplets $(n, a, b)$ possibles est donc $(3, 3, 3), (4, 4, 2), (6, 3, 2)$. Si $n = 3$, montrer que $G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Y a-t-il effectivement 3 classes de conjugaison ?
7. Si $n = 4$, montrer que $G$ est abélien et trouver une contradiction.
8. Si $n = 6$, montrer que $G$ est non abélien. On rappelle que le groupe des permutations $\mathfrak{S}_3$ est le seul groupe non abélien d'ordre 6 : $G$ est donc isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_3$.
9. Montrer que $G = \mathfrak{S}_3$ a bien 3 classes de conjugaison.