Algèbre 2, L3
Partiel du 10/11/2025 à 9h
Documents/calculatrices interdits
Durée : 2h

Ce sujet est trop long pour être traité en deux heures mais vous permet de choisir les exercices sur lesquels vous êtes le plus à l'aise.

Questions de cours

1. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. Soit G un groupe et $X \subset G$ un sous-ensemble. Soit H une partie de G. Ecrire avec des quantificateurs l'assertion "H est le sous-groupe de G engendré par X".
3. Décrire les sous-groupes d'un groupe cyclique d'ordre n.
4. Soit G un groupe, $a \in G$, et supposons que $|\langle a \rangle| = n$. A quel groupe $\langle a \rangle$ est-il isomorphe et quel est l'ensemble $\{k \,|\, a^k = e\}$?

Exercices standard

1. Soit G un groupe d'ordre 33 agissant sur un ensemble E de cardinal 17. Combien y a-t-il d'orbites pour cette action ?
2. Donner la décomposition cyclique du groupe $\mathbb{Z}/40\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$.
3. Donner la liste des groupes abéliens d'ordre 160, à isomorphisme près.

Problème : groupes d'ordre p^3 non abéliens

Soit p un nombre premier. On considère l'ensemble G des matrices triangulaires supérieures unitaires de taille 3×3 à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

$$G = UT_3(\mathbb{F}_p) = \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{F}_p \right\}$$

On munit G de la multiplication matricielle. Ce groupe est souvent appelé le *groupe de Heisenberg* modulo p.

Partie I : Cas Général (p premier impair)

1. Montrer que G est un groupe et déterminer son ordre $|G|$.
2. Etant donnés a, b, c, a', b', c', déterminer a'', b'', c'' tels que $M(a,b,c)M(a',b',c') = M(a'',b'',c'')$.
3. Calculer le commutateur $[M(a,b,c), M(a',b',c')] = M(a,b,c)M(a',b',c') - M(a',b',c')M(a,b,c)$.
4. Déduire de la question précédente que G est un groupe non abélien.
5. Déterminer le centre $Z(G)$ du groupe G. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
6. Montrer que le groupe quotient $G/Z(G)$ est un groupe abélien isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Partie II : Cas Spécifique $p = 2$ (Isomorphisme avec D_8)

Dans cette partie, on considère le cas $p = 2$. Le groupe G est alors d'ordre 8. On cherche à démontrer l'isomorphisme $G \cong D_8$, où D_8 est le groupe diédral d'ordre 8.

On définit les matrices suivantes :

$$S = M(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = M(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Montrer que S est d'ordre 2.
8. Montrer que R est d'ordre 4.
9. Déterminer l'inverse de R, noté R^{-1}.
10. Montrer que la relation fondamentale du groupe diédral est vérifiée, à savoir :

$$SRS = R^{-1}$$

11. Conclure sur la nature du groupe $G = UT_3(\mathbb{F}_2)$.

Problème : dénombrement des coloriages d'un carré

Cet exercice utilise la théorie des actions de groupes pour déterminer le nombre de façons distinctes de colorier les sommets d'un carré. Les questions sont volontairement moins détaillées que dans les exercices précédents.

On considère un carré $ABCD$. On dispose de k couleurs distinctes ($k \geq 1$). Un *coloriage* (des sommets du carré) est une application $\{A, B, C, D\} \to \{1, \ldots, k\}$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des coloriages. Deux coloriages sont considérés comme *équivalents* s'ils peuvent être transformés l'un en l'autre par une symétrie (rotation ou réflexion) du carré. On rappelle que le groupe de symétrie est le groupe diédral $G = D_8$.

1. Lister les 8 éléments de G en les classant par type de symétrie (identité, rotations, réflexions).
2. Déterminer le cardinal de $\mathcal{C}$.
3. Rappeler la formule de Burnside.
4. Déterminer le nombre de classes d'équivalences de coloriages, en fonction de k.
5. On suppose dans cette question que $k = 2$. Appliquer la formule précédente pour déterminer le nombre de classes d'équivalence de coloriages, et vérifier directement le résultat, en déterminant le nombre de coloriages en noir et blanc des sommets d'un carré, à isométries près.