LISTE RESTREINTE DE QUESTIONS DE COURS

Pierre-Emmanuel Chaput

1. Ecriture avec des quantificateurs

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E.

- Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "$\mathcal{R}$ soit une relation d'équivalence".
- On suppose par la suite que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On note $\pi : E \to E/\mathcal{R}$ l'application de passage au quotient. Soit $f : E \to F$. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "f passe au quotient par $E/\mathcal{R}$".
- Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "pour $x \in E$, $f(x)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de x".

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "$(G, *)$ est un groupe".

Soit $(G, *)$ un groupe.

- Soit $H \subset G$. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "H est un sous-groupe de G".
- Soit X et H des sous-ensembles de G. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "H est le sous-groupe engendré par X". Etant donné un groupe B, on notera $A \leq B$ pour dire que A est un sous-groupe de B.
- On notera $\langle X \rangle$ le sous-groupe engendré par X. Soit $H \leq G$. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "H est monogène".
- Soit $H \leq G$. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "H est distingué dans G."

- Soit $H \leq G$. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "La multiplication $G \times G \to G, (x, y) \mapsto xy$ passe au quotient en une application $G/H \times G/H \to G/H$". Autrement dit, "la classe dans G/H du produit xy ne dépend que de la classe de x et la classe de y dans G/H".
- Soit p un nombre premier. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "G est un p-groupe".

Soit G, H des groupes et $f : G \to H$ une fonction.

- Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "f est un morphisme de groupes".
- Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "f est un isomorphisme de groupes".

Soit G un groupe et E un ensemble, munis d'une application $G \times E \to E, (g, x) \mapsto g \cdot x$.

- Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "$\cdot$ définit une action à gauche de G sur E."
- On suppose que $\cdot$ est une action. Soit $x \in E$. Définir avec des quantificateurs l'orbite et le stabilisateur de x.
- Définir avec des quantificateurs le fixateur de G.
- Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "G agit transitivement sur E."

Soit G un groupe.

- Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "G est cyclique."
- Supposons G fini et abélien. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "La suite des invariants de G est $(q_1, \dots, q_k)$."

Soit G un groupe fini. On note $|G| = n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, où les nombres p_i sont premiers et les α_i sont strictement positifs.

- Soit $H \leq G$. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "H est un sous-groupe de Sylow de G."

Soit n un entier et $k \leq n$.

- Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "σ est un k-cycle".
- Soit $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Ecrire avec des quantificateurs l'affirmation "σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$.

2. résultats à connaitre

- Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}$?
- Enoncer le théorème de Lagrange.
- Etant donné G un groupe et $H \leq G$, à quelle condition la formule $\overline{x} * \overline{y} := \overline{xy}$, pour $x, y \in G$, définit-elle une structure de groupe sur le quotient G/H ?
- Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes, rappeler la définition de $\mathrm{Ker}(f)$. A quelle condition sur $\mathrm{Ker}(f)$ a-t-on f injective ? Prouver cette équivalence.
- Enoncer le théorème de factorisation canonique des morphismes.
- Soit $a \in G$, et supposons que $|\langle a \rangle| = n$. A quel groupe $\langle a \rangle$ est-il isomorphe et quel est l'ensemble $\{k \mid a^k = e\}$?
- Ecrire l'équation aux classes.
- Ecrire la formule de Burnside.
- Enoncer le théorème de Cauchy.
- Décrire les sous-groupes d'un groupe cyclique d'ordre n.
- Enoncer le théorème de décomposition cyclique des groupes abéliens finis.

3. Exemples

- Donner un exemple de relation d'équivalence.
- Donner un exemple de sous-groupe non trivial.
- Donner un exemple de groupe abélien et de groupe non abélien.
- Donner deux exemples de morphismes de groupes $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
- Ecrire la décomposition cyclique de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
- Donner un exemple d'action transitive du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ sur l'ensemble $\{-1, 1\}$.
- Décrire tous les morphismes $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- Décrire tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
- Décrire les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_3$.
- Donner l'exemple de deux 4-cycles dans $\mathfrak{S}_4$ et d'une permutation qui les conjugue.

4. Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations, dites si elle est vraie en citant un résultat du cours ou en donnant un contre-exemple et en justifiant que c'est bien un contre-exemple. Soit G un groupe. Si G est fini, on note $|G| = n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, où les nombres p_i sont premiers et les α_i sont strictement positifs.

- Tout groupe est monogène.

- Si H est un sous-groupe de G et G est fini, alors le cardinal de H divise le cardinal de G.
- Si H est distingué dans G, alors le produit sur G passe au quotient en un produit sur G/H.
- Etant donnés deux groupes, une application $f : G \to H$ est injective si et seulement si $\{x \in G : f(x) = e_H\} = \{e_G\}$.
- Dans un groupe fini, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.
- Si G agit sur E et G est fini, toute G-orbite est finie et son cardinal divise celui de G.
- Supposons que G est un p-groupe. Alors le cardinal de $Fix(G)$ est congru au cardinal de E modulo p.
- Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$. Dans G, il existe un élément d'ordre p_i.
- Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$. Dans G, il existe un élément d'ordre $p_i^{\alpha_i}$.
- Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $1 \leq j \leq \alpha_i$. Dans G, il existe un sous-groupe d'ordre p_i^j.
- Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $1 \leq j \leq \alpha_i$. Dans G, il existe un élément d'ordre p_i^j.
- Soit p premier. Tout groupe d'ordre p^2 est abélien.
- Soit p premier. Tout groupe d'ordre p^3 est abélien.
- Tout groupe fini est cyclique.
- Soit d un diviseur de n. Si G est cyclique, il existe un sous-groupe de H d'ordre d.
- Le produit de deux groupes cycliques est cyclique.
- Un p-groupe admet p sous-groupes de Sylow.
- Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$ et n_i le nombre de p_i-sous-groupes de Sylow de G. On a $n_i | \prod_{j \neq i} p_j$.
- Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$ et n_i le nombre de p_i-sous-groupes de Sylow de G. Alors n_i est congru à 0 modulo p_i.
- Dans le groupe des permutations, le conjugué d'un r-cycle est un r-cycle.
- Dans le groupe des permutations, deux r-cycles sont conjugués.
- Toute permutation s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints.
- La signature est un morphisme de groupes $(\mathfrak{S}_n, \circ) \to (\mathbb{R}^*, \times)$.
- La signature d'un r-cycle est $(-1)^r$.
- Le groupe symétrique est engendré par les transpositions.
- Le groupe alterné est engendré par les transpositions.
- Le groupe alterné est engendré par les 3-cycles.

Pierre-Emmanuel Chaput